1. BÖLÜM

KÜMELER

HEDEFLER

1. Kümeyi tanımlayabilme ve kümeleri farklı yöntemlerle gösterebilme
2. Kümelerin arakesitini, birleşimini, farkını bulabilme.
3. Her problem için karşılık gelen evrensel kümeyi oluşturabilme.
4. Eşit ve denk kümeleri ayırt edebilme.
5. Tümleyen kümeyi bulabilme.
6. Tüm altkümeleri bulup, kuvvet kümesi oluşturabilme.
7. Kümeleri liste, ortak özellik ve Venn şeması yöntemleri ile gösterebilme.

DAVRANIŞLAR

1. Verilen küme için probleme Liste Yöntemi, Ortak Özellik Yöntemi, Venn Şeması Yönteminden uygun olan gösterim yöntemini bilir ve bu yöntemle gösterir.
2. Verilen kümelerin arakesitini, birleşimini tümleyenini ve birbirinden farkını bulur.
3. Kümeleri liste yöntemiyle ve ortak özellik yöntemiyle çeşitli biçimlerde gösterir.
4. Verilen bir kümeye denk olan başka kümeleri bulur.
5. Kuvvet kümesini, ve kuvvet kümesinin eleman sayısını bulur. Bir A kümesinin altkümelerinin sayısı ile A nın kuvvet kümesinin eleman sayısının aynı olduğunu bilir ve bununla ilgili örnekler yapar.
6. Verilen bir kümenin r elemanlı altkümelerini ve bu altkümelerin sayısını bulur.
7. Verilen kümelerin kartezyen çarpımını hesaplar.

Belli bir takım nesnelerin oluşturduğu topluluğa *küme*, kümeyi oluşturan nesnelerin her birine de bu kümenin *elemanı* denir. Kümeler A,B,C,X,W,... gibi büyük harflerle, elemanları ise a,b,c,x,w,... gibi küçük harflerle gösterilir. Elemanları olmayan kümeye *boş küme* adı verilir, boş küme özel olarak Yunan alfabesindeki F harfine karşılık gelen Φ harfi ile gösterilir.

1.1. KÜMELERİN GÖSTERİLİŞİ

Kümeler üç farklı biçimde gösterilebilirler. Bunlar liste yöntemi, ortak özellik yöntemi ve Venn şeması yöntemidir.

1. Liste Yöntemi

Bu yöntemle küme, elemanlarının her biri ayrı ayrı (bir liste gibi) yazılarak gösterilir. Bu listenin bir küme belirttiğini göstermek amacıyla liste { } işaretlerinin arasına, birbirinden virgül işareti ile ayrılarak, yazılır. Bu işaretlerden soldakine *küme açma parantezi*, sağdakine *küme kapama parantezi*, her ikisine birden *küme parantezleri* denir.

Bir *a* nesnesinin bir A kümesine ait olduğunu belirtmek için $a \in A$ yazılır ve "*a elemanıdır* A" veya "*a*, A *nın elemanıdır*" diye okunur. *b* nesnesi A ya ait değilse $b \notin A$ yazılır ve "*b*, A *nın elemanı değildir*" diye okunur. Bir A kümesinin eleman sayısı *s*(A) veya |A| ile gösterilir. Bir kümenin elemanlarını farklı sırada yazmakla küme değişmez, yine aynı kümedir.

Örnek 1. A={a,b,c,d,e} olsun. A kümesinin elemanları a,b,c,d,e dir. Yani $a \in A$, $b \in A$, $c \in A$, $d \in A$, $e \in A$ dır. *s*(A)=5 dir. $x \notin A$, $y \notin A$, $m \notin A$ dır. A={a,b,c,d,e} kümesi aynı zamanda A={b,a,e,c,d} veya A= {e,c,a,d,b} biçiminde de gösterilebilir.

Örnek 2. Boş kümenin Φ ile gösterildiğini biliyoruz. Boş küme liste yöntemi ile { } ile gösterilir. Boş kümenin elemanı olmadığından küme açma ve kapama parantezleri arasına hiçbir şey yazılmayacaktır. O halde Φ={ } olur.

Örnek 3. A={1,-2,{1,2,3},{5},{ } } olsun. A kümesinin eleman sayısı 5 dir, yani *s*(A)=5 dir. $1 \in A$, $-2 \in A$, $\{1,2,3\} \in A$, $\{5\} \in A$ ve $\{\ \} \in A$ dır. $5 \notin A$, $\{1\} \notin A$, $\{2\} \notin A$, $\{1,-2\} \notin A$, $a \notin A$ dır.

Bu örnekte verilen A kümesinin bazı elemanları yine bir kümedir. A kümesinin elemanlarından biri de boş kümedir.

2. Ortak Özellik Yöntemi

Ortak özellik yöntemi iki farklı biçimde kullanılır.

I) Bir küme belli bir özelliği sağlayan bütün elemanlardan oluşuyorsa bu küme ortak özellik yöntemi ile gösterilebilir. Eğer A kümesi p özelliğini sağlayan tüm x elemanlarından oluşuyorsa, bu durumda $A=\{x \mid p(x)\}$ veya $A=\{x : p(x)\}$ biçiminde gösterilir. Küme parantezi içindeki " | " ve ":" işaretleri "*öyle ki*" diye okunur.

Örnek 4. G={x| x içinde en az iki a harfi bulunan bir gün} kümesinin liste yöntemi ile yazılmış hali

G={Pazartesi, Çarşamba, Pazar}

biçimindedir. s(G)=3 tür.

Örnek 5. B={x| x bir tamsayı ve $-3<x\leq 5$}={-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5} dir ve s(B)=8 dir.

Örnek 6. Z={x | x bir tamsayı} ile tüm tamsayıların kümesi gösterilir.

II) Ortak özellik yönteminin ikinci kullanılış biçimi ise kümeyi oluşturan elemanların belirli bir kurala göre sıralı olarak verilmesi durumunda ortaya çıkar. Yani bir kümenin elemanları belirli bir kurala göre sıralanmış elemanlardan meydana geliyorsa bu durumda liste yönteminde kullanılan küme parantezleri arasına, kümenin elemanlarının kuralını bulmaya yetecek kadar eleman sıralı bir biçimde yazılır ve daha sonra "..." işaretleri konur.

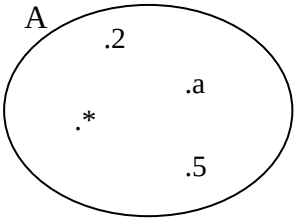
Örnek 7. A={1,3,5,...} gösterimi A nın tüm elemanlarının bulunmasına yetecek bilgileri vermektedir. A nın elemanlarının belirlenmesinde kullanılacak ortak özellik A nın sıralı ilk üç elemanından elde edilebilmektedir. Yani bu gösterimden A nın tüm pozitif tek tamsayıların kümesi olacağı kolayca anlaşılır.

Örnek 8. Bazı durumlarda kümeyi oluşturacak elemanların sahip olduğu ortak özellik (kümeyi oluşturan nesnelerin sıralanış kuralı) kolayca bulunamayabilir. Örneğin B={-1, 0,3,8,...} kümesinin diğer elemanlarının ne olduğu kolayca anlaşılamayabilir, fakat bu gösterimden B nin elemanlarının bir kurala göre sıralanmış sayılardan oluştuğu anlaşılmaktadır. O halde bu kuralın ne olduğu araştırılarak bulunmalıdır. B kümesini ortak özellik yönteminin birinci biçimiyle gösterirsek kuralını da açıkça belirtmiş oluruz: $B=\{ n^2-1 \mid n=0,1,2,...\}$

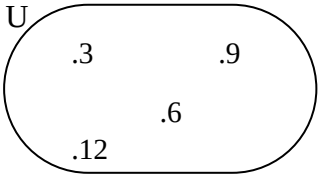
3.Venn Şeması Yöntemi

Küme elemanlarının düzlemdeki kapalı bir eğrinin içine yazılarak gösterilmesine, *kümenin Venn şeması ile gösterimi* denir. Venn şeması ile gösterimde kullanılan kapalı eğriler genellikle, çizilmesi en kolay olan, çember veya elips benzeri eğrilerdir. Bu kapalı eğrinin dışında eğriye yakın bir yere kümenin adını gösteren büyük harf yazılır.

Örnek 9. A={2,5,Δ,* ,a} kümesi alttaki şekil ile gösterilebilir. Buna A kümesinin Venn şeması ile gösterimi denir.



Örnek 10. Aşağıdaki Venn şeması U={3,6,9,12} kümesini göstermektedir.

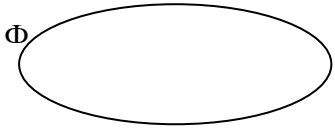


Açıklama. Bir küme hangi yöntemle gösterilirse gösterilsin, o kümeye ait eleman küme içinde bir defa yazılır. Birden fazla defa yazılmaz. Yani {a,b,c,a,d} biçiminde bir küme yoktur, çünkü burada a elemanı iki defa yazılmıştır.

Örnek 11. Liste yöntemi ile $\Phi=\{\ \}$ biçiminde gösterilen boş küme, ortak özellik yöntemi ile çok farklı biçimlerde yazılabilir. p(x) gerçeklenmesi mümkün olamayan herhangi bir özellik iken $\{\ x \mid p(x)\ \}$ kümesinin hiçbir elemanının olmayacağı aşikardır. Örneğin

$$\Phi=\{\ x \mid x^2=-1,\ x\in Z\}$$

dir. Çünkü karesi –1 olan hiçbir tamsayı yoktur. Φ yi Venn şeması ile gösterirken düzlemde bir kapalı eğri alıp içerisine hiçbir şey yazılmaz, örneğin



boş kümenin Venn diyagramı ile bir gösteriliş biçimidir.

1.2. EŞİT KÜME-DENK KÜME

Tanım. Elemanları aynı olan kümelere *eşit küme*ler denir. Eleman sayıları aynı olan kümelere ise *denk küme*ler adı verilir. A ve B kümeleri eşit ise bu A=B ile, C ve D kümeleri denk ise bu C≡D ile gösterilir.

Örnek 1. A={2,4,5,7} ile B={7,2,5,4} kümesi eşittir, yani A=B dir, çünkü A ve B kümelerinin her ikisi de aynı elemanlardan oluşmuşlardır.

Örnek 2. A={2,4,5,7} ile D={x,y,a,b} kümeleri denktir. Çünkü A nın da D nin de eleman sayısı 4 tür. Yani, A≡D dir.

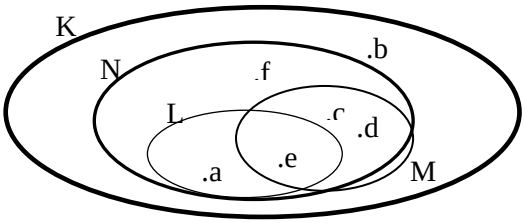
Açıklama. Eşit kümeler denktirler, fakat denk kümelerin eşit olması gerekmez. Çünkü iki kümenin elemanları aynı ise eleman sayıları da aynıdır, fakat, iki kümenin eleman sayısı aynı ise bu kümelerdeki elemanların aynı olması gerekmez.

1.3. ALTKÜME, EVRENSEL KÜME VE BİR KÜMENİN ALTKÜMELERİNİN SAYISI

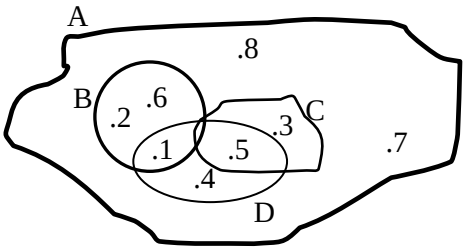
Tanım. Bir A kümesinin her elemanı bir B kümesinin de bir elemanı oluyorsa A kümesine B kümesinin bir *altküme*si veya B kümesine A kümesini

kapsayan küme denir ve bu durum $A \subset B$ veya $B \supset A$ sembollerinden herhangi biri ile gösterilir.

Örnek 1. K={a,b,c,d,e,f}, L={a,e}, M={c,d,e}, N={a,c,d,e,f} olsun. Bu durumda $L \subset K$, $M \subset K$, $N \subset K$, $L \subset N$, $M \subset N$ olur. Burada $L \subset N \subset K$ ve $M \subset N \subset K$ olduğuna dikkat ediniz. Bu kümeler Venn Şeması ile gösterilirse, alt küme olma durumları daha iyi görülebilir. Venn şeması aşağıdaki gibidir:



Örnek 2. A={1,2,3,4,5,6,7,8}, B={1,2,6}, C={3,5}, D={1,4,5} olsun. $B \subset A$, $C \subset A$, $D \subset A$ olduğu açıktır. Örneğin $B \subset A$ olduğu, B nin her elemanının A nın da bir elemanı olması nedeniyle bellidir.



1.3.1. Altkümenin Özellikleri

1. Boş küme her kümenin altkümesidir.
2. Her küme kendisinin alt kümesidir.
3. $A \subset B$ ve $B \subset A$ ise A=B dir.
4. $A \subset B$ ve $B \subset C$ ise $A \subset C$ dir.

Tanım. Üzerinde işlem yapılan (ve yapılabilecek) tüm kümeleri altküme olarak kapsayan, yeterince geniş kümeye *evrensel küme* denir.

Evrensel küme genellikle E ile gösterilir ve evrensel küme Venn Şeması ile gösterilirken genellikle bir dikdörtgenle temsil edilir.

Evrensel küme üzerinde işlem yapılabilecek tüm kümeleri kapsadığından, bir başka ifade ile üzerinde işlem yapılabilecek tüm elemanları da kapsayan en küçük kümedir. Tanımda yer alan "üzerinde işlem yapılan tüm kümeleri kapsayan yeterince geniş kümeye evrensel küme denir" cümlesindeki "yeterince geniş" sözcükleri "yeterinden fazla eleman bulundurmaması" anlamına gelmektedir. Bu nedenle evrensel küme tanımı "*üzerinde işlem yapılabilecek tüm kümeleri kapsayan en küçük kümedir*" biçiminde de verilebilir.

Sonuç olarak evrensel küme üzerinde çalışılan probleme göre değişebilen bir kümedir. Örneğin sadece haftanın günleri ile işlem yapıyorsak evrensel küme

E={ Pazartesi, Salı, Çarşamba, Perşembe, Cuma, Cumartesi, Pazar}

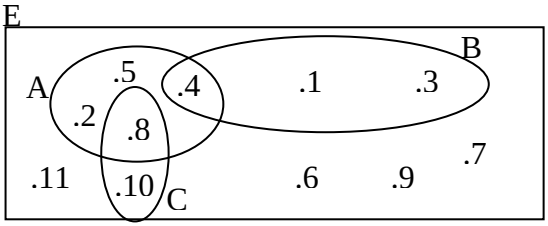
olacaktır. Bu problem için örneğin

F={ Pazartesi, Salı, Çarşamba, Perşembe, Cuma, Cumartesi, Pazar, Şubat}

kümesi evrensel küme değildir, çünkü problemin hiçbir durumunda karşılaşılmayacak bir eleman olan Şubat elemanını kapsamaktadır. Bir başka ifade ile problemin çözümünde ortaya çıkabilecek bütün elemanları kapsayan EN KÜÇÜK küme F değil E dir.

Örnek 3. A={2,4,5,8,11}, B={1,3,4,5,6,7}, C={5,8,10} ise ve sadece bu kümelerin elemanları ile işlemler yapıp bulunan sonuçlar yine bu kümelerden birinde oluyorsa evrensel küme E={1,2,3,4,5,6,7,8,10,11} dir. F={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11} kümesi de A, B ve C kümelerini altküme olarak kapsadığı halde F evrensel küme olarak alınmaz.

Örnek 4. E={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11} evrensel kümesi ve A={2,4,5,8}, B={1,3,4}, C={8,10} kümeleri verilsin. Bu durumda E evrensel kümesinin bütün altkümeleri değil, sadece üç tanesinin (A, B ve C altkümelerinin) verildiğine dikkat ediniz. Venn Şeması aşağıdaki gibidir:



Tanım. Bir A kümesinin kendisi hariç tüm alt kümelerine *öz alt küme* (veya *has alt küme*) denir.

Bir A kümesinin *alt kümelerinin sayısı* boş küme de dahil olmak üzere A nın elemanları ile oluşturulabilen tüm kümelerin sayısıdır.

Örnek 5. A={a,b,c,d} kümesinin tüm alt kümelerini yazalım. A nın öz alt kümeleri

{ }, {a}, {b}, {c}, {d}, {a,b}, {a,c}, {a,d}, {b,c}, {b,d}, {d,c}, {a,b,c}, {a,b,d}, {b,c,d}, {a,c,d}

olmak üzere 15 tanedir. A nın kendisi de A nın alt kümesi olduğundan A nın toplam 16 tane alt kümesi vardır. Bunlardan 15 tanesi öz alt kümedir. Alt kümeleri eleman sayılarına göre bulmak istersek,

A nın elemanı bulunmayan alt kümesi boş kümedir.

A nın 1 elemanlı alt kümeleri {a},{b},{c},{d} dir.

A nın 2 elemanlı alt kümeleri {a,b}, {a,c}, {a,d}, {b,c}, {b,d}, {c,d} dir.

A nın 3 elemanlı alt kümeleri {a,b,c},{a,b,d},{b,c,d},{a,c,d}

A nın 4 elemanlı alt kümesi {a,b,c,d}=A dır.

A nın 4 den fazla sayıda elemanı bulunan alt kümesi yoktur.

1.3.2. Bir Kümenin Alt Kümelerinin Sayısı

A kümesinin eleman sayısı n, yani $s(A)=n$ olsun. Bu durumda A nın tüm alt kümelerinin sayısı 2^n dir.

Örnek 6. A={a,b,c,d} ise $s(A)=4$ olduğundan A nın tüm alt kümelerinin sayısı $2^4=2.2.2.2=16$ dır. Bu 16 küme yukarıdaki örnekte elde edilmiştir.

Örnek 7. B={0,1,2,3,4,5,6,7} ise s(B)=8 olduğundan B nin alt kümeleri sayısı 2^8=2.2.2.2.2.2.2.2=256 dır.

1.3.3. *n* Elemanlı Bir Kümenin *r* Elemanlı Alt Kümelerinin Sayısı

s(A)=n olsun. $0 \le r \le n$ olmak üzere A nın r elemanlı alt kümelerinin sayısı r bir tamsayı olmak üzere

$$\binom{n}{r} = C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

formülü yardımı ile hesaplanan tamsayıdır. Burada " ! " sembolü "*faktöriyel*" olarak okunur. k! ile 1 den k dahil, k ya kadar olan tüm tamsayıların çarpımı gösterilir. O halde k!=1.2.3...k olarak hesaplanır. Özel olarak 0!=1 olduğu kabul edilir.

Örnek 8. A={x, y, z, t, u, v} olsun. s(A)=6 dır. A nın 3 elemanlı alt kümelerinin sayısı

$$\binom{6}{3} = C(6,3) = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.1.2.3} = 20$$

A nın iki elemanlı alt kümelerinin sayısı ise

$$\binom{6}{2} = C(6,2) = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.1.2.3.4} = 15$$

olarak bulunur.

Örnek 9. 12 elemanlı bir kümenin 8 elemanlı alt kümelerinin sayısını bulalım. Bu sayı

$$\binom{12}{8} = C(12,8) = \frac{12!}{8!\,4!} = \frac{8!.9.10.11.12}{8!.1.2.3.4} = 495$$

dir.

Örnek 10. 128 tane alt kümesi olan kümenin 3 elemanlı alt kümelerinin sayısını bulalım.

$128=2^n \Rightarrow n=7$ olur. 7 elemanlı bir kümenin 3 elemanlı alt kümelerinin sayısı

$$\binom{7}{3} = C(7,3) = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{4!.5.6.7}{1.2.3.4!} = 35$$

olur.

1.4 KÜME İŞLEMLERİ

Bu kısımda kümelerle yapılabilecek işlemler tanıtılacaktır.

1.4.1. Kümelerin Kesişimi (Arakesiti)

İki veya daha fazla kümenin ortak elemanlarının oluşturduğu kümeye bu kümelerin *kesişim kümesi* (veya *arakesit kümesi*) denir. A ve B iki küme iken A ve B nin kesişimi $A\cap B$ ile gösterilir. "$\cap$" sembolü "*kesişim*" veya "*arakesit*" olarak okunur. Sembollerle gösterilecek olursa;

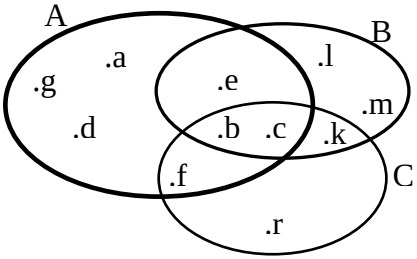
$$\mathbf{A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ ve } x\in B\}}$$

dir. Benzer biçimde $A_1, A_2,...,A_n$ kümelerinin tümünde birden ortak olarak bulunan elemanların oluşturduğu kümeye $A_1, A_2,...,A_n$ kümelerinin kesişimi denir ve bu $A_1\cap A_2\cap...\cap A_n$ ile gösterilir, yani;

$$A_1\cap A_2\cap...\cap A_n=\{ x \mid x\in A_1 \text{ ve } x\in A_2 \text{ ve } ...\text{ve } x\in A_n\}$$

dir.

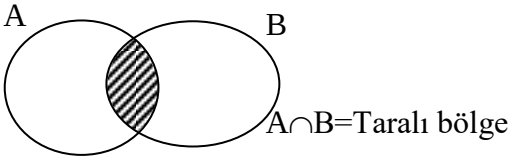
Örnek 1. A={a,b,c,d,e,f,g} , B={b,e,k,l,c,m} ise $A\cap B$ hem A hem de B de ortak olarak bulunan elemanların oluşturduğu küme olduğundan $A\cap B$={b,c,e} dir. C={b,k,c,f,r} olsun. A,B ve C kümelerinin arakesiti {b,c} olur. Venn şeması aşağıdaki gibidir.



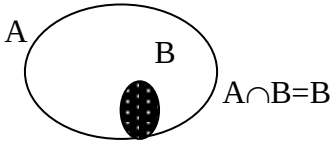
Venn Şemaları Yardımı ile Arakesit Bulma

A ve B gibi iki küme için aşağıdaki üç durum söz konusudur.

1.Durum:

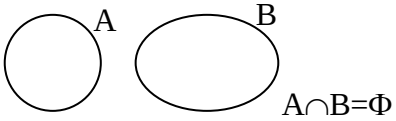


2.Durum: $B \subset A$ ise $A \cap B = B$ dir (veya $A \subset B$ ise $A \cap B = A$ dır.).

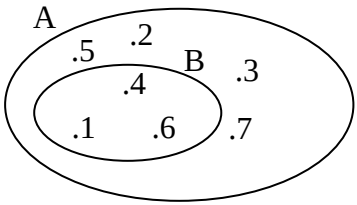


$A \subset B$ ise $A \cap B = A$ olacağı aşikardır (Venn şeması ile gösterimini okuyucuya bırakıyoruz.).

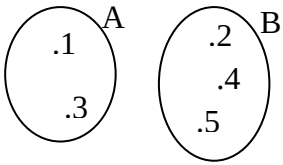
3.Durum:



Örnek 2. $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B=\{1,4,6\}$ olsun. $B \subset A$ olduğundan $A \cap B = B$ dir, çünkü B nin bütün elemanları hem A hem de B de vardır.



Örnek 3. A={1,3}, B={2,4,5} olsun. A∩B=Φ dir, çünkü A ve B nin ortak elemanı yoktur.



Tanım. Ortak hiçbir elemanı olmayan kümelerin arakesiti boş kümedir. A∩B=Φ ise A ve B kümelerine *ayrık kümeler* denir.

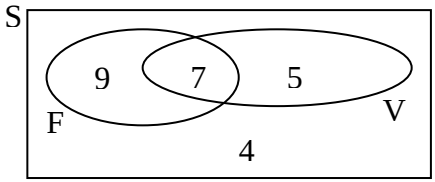
Bu tanıma göre yukarıdaki Örnek3 te verilen A ve B kümeleri ayrıktır.

Kesişimin Özellikleri

1. Her kümenin kendisiyle arakesiti yine kendisidir, yani A∩A=A dır.
2. A∩B=B∩A dır.
3. A∩(B∩C)=(A∩B) ∩C dir ve bu A∩B∩C ile de gösterilebilir.
4. A∩Φ=Φ dir.
5. A∩E=A dır.
6. A⊂B ise A∩B=A dır.

Örnek 4. Bir sınıftaki öğrencilerin sayısı 25 dir. Bu öğrencilerin 16 sı futbol, 12 si voleybol, 7 si hem futbol hem de voleybol oynamaktadır. Bu sınıfta en fazla bir oyun oynayan kaç öğrencinin var olduğunu bulalım.

Sınıf kümesini S, futbol oynayanların kümesini F, voleybol oynayanların kümesini V ile gösterelim. s(S)=25, s(F)=16, s(V)=12, s(F∩V)=7 olduğu kullanılarak aşağıdaki Venn şeması çizilebilir:



Venn şemasına her kümenin sınırları içinde kalan sayıların toplamı, o kümenin eleman sayısını verecek şekilde yerleştirilir. Bu durumda 4 öğrenci futbol veya voleyboldan her ikisini de oynamamaktadır. 5 öğrenci sadece voleybol, 9 öğrenci de sadece futbol oynamaktadırlar. O halde en fazla bir oyun oynayan öğrencilerin sayısı 9+5+4=18 dir.

1.4.2. Kümelerin Birleşimi

İki veya daha fazla kümenin bütün elemanlarının oluşturduğu kümeye bu kümelerin *birleşim kümesi* denir. A ve B iki küme iken A ve B nin birleşimi $A \cup B$ ile gösterilir, "A *birleşim* B" diye okunur. Bu durumda

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\}$

dir. Benzer biçimde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kümelerinin elemanlarının tamamının bir araya getirilmesi ile oluşan kümeye $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kümelerinin birleşimi denir ve bu $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ ile gösterilir, yani;

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{ x \mid x \in A_1 \text{ ya da } x \in A_2 \text{ ya da } \ldots \text{ya da } x \in A_n\}$$

dir.

Örnek 5. A={ 3, 6, 9, 12, 15, 18 }, B={2, 4, 6, 8, 10, 12} olsun.

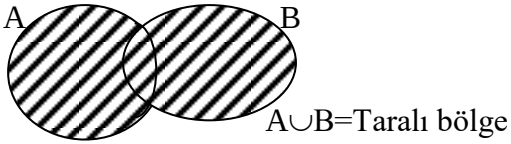
$$A \cup B = \{ 3, 6, 9, 12, 15, 18, 2, 4, 8, 10 \} = \{ 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18 \}$$

olur.

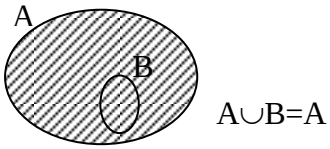
Venn Şeması Yardımı ile Birleşim

A ve B gibi iki küme için aşağıdaki üç durum söz konusudur.

1.Durum:

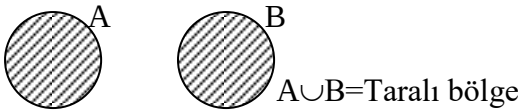


2.Durum: A⊃B ise A∪B=A olur (veya B⊃A ise A∪B=B olur.).

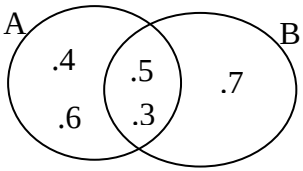


B⊃A ise A∪B=B olduğu aşikardır (Venn şeması ile gösterimini okuyucuya bırakıyoruz.).

3.Durum:

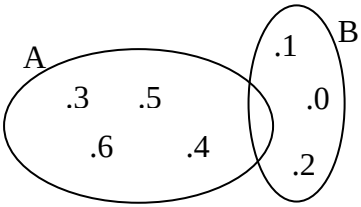


Örnek 6. A={3,4,5,6} , B={3,5,7} olsun.

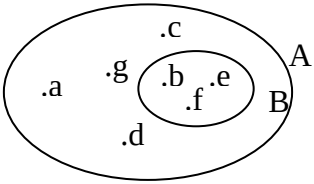


A∪B={3,4,5,6,7} olur. *s*(A)=4, *s*(B)=3, *s*(A∪B}=5 dir.

Örnek 7. A={3,4,5,6}, B={0,1,2} olsun. A∪B={0,1,2,3,4,5,6} olur. s(A)=4, s(B)=3, s(A∪B)=7 dir.



Örnek 8. A={a,b,c,d,e,f,g}, B={b,e,f} olsun.



$A \cup B = A = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ olur. $s(A)=7$, $s(B)=3$, $s(A \cup B)=7$ dir.

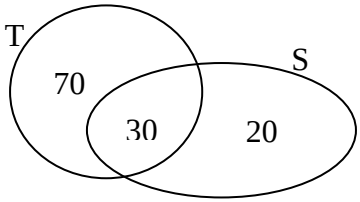
Birleşimin Özellikleri

1. Her kümenin kendisi ile birleşimi yine kendisidir, yani $A \cup A = A$ dır.
2. $A \cup B = B \cup A$ dır.
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ dir ve bu $A \cup B \cup C$ ile de gösterilebilir.
4. $A \cup \Phi = A$ dır.
5. $A \subset B$ ise $A \cup B = B$ dir. Özel olarak E evrensel küme iken $A \cup E = E$ olur.
6. $A \cup B = \Phi$ ise $A = \Phi$ ve $B = \Phi$ dir.
7. $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ ve

   $s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$ dir.

Problem: Yapılan bir anket sonucunda 30 kişinin hem tiyatro hem de sinemayı sevdiği, 100 kişinin tiyatro sevdiği, 50 kişinin de sinema sevdiği sonucu ortaya çıkmıştır. Anket toplam kaç kişiye yapılmıştır?

Çözüm.



Üstteki Venn şeması çizilir. Burada T ile tiyatro, S ile sinema sevenlerin kümesi gösterilmiştir. $s(T \cup B)$ istenen cevaptır ve

$$s(T \cup S)=70+20+30=120$$

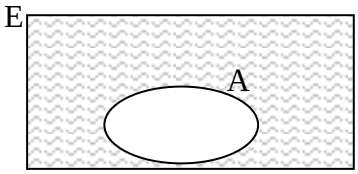
olur. Yani anket toplam 120 kişi üzerinde yapılmıştır.

Kesişim ve Birleşim Arasındaki Bağıntılar

1. $A \cap (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C)$ dir.
2. $A \cup (B \cap C)= (A \cup B) \cap (A \cup C)$ dir.

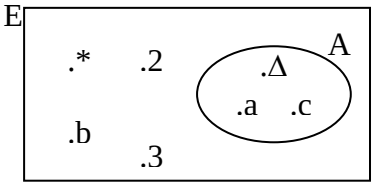
1.4.3. Bir Kümenin Tümleyeni

Verilen herhangi bir A kümesi için A da olmayıp E evrensel kümesinde var olan elemanların oluşturduğu kümeye A nın *tümleyeni* denir ve A' veya A^T ile gösterilir.



Venn şeması yöntemi ile A' kümesi taralı bölgedir.

Örnek 9. $E=\{\Delta,*,2,3,a,b,c\}$, $A=\{\Delta,c,a\}$ ise $A'=\{*,2,3,b\}$ olur.



Tümleyenin Özellikleri

1) $(A')' = A$ dır

2) $A \cup A' = E$ dir.

3) $A \cap A' = \Phi$ dir.

4) $\varphi' = E, \quad E' = \Phi$ dir.

5) $A \subset B$ ise $B' \subset A'$ dir.

6) $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$ dir. (**De Morgan Kuralları**)

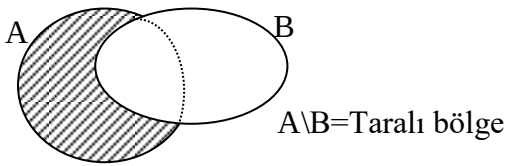
Yukarıdaki özelliklerin her birinin geçerli olduğu, Venn şeması çizilerek kolayca gösterilebilir.

1.4.4. İki Kümenin Farkı

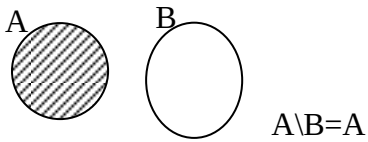
A ve B kümeleri verilsin. A da olup B de olmayan elemanların oluşturduğu kümeye "A *fark* B " kümesi denir. Bu küme "A-B" veya "A\B" sembollerinden biri ile gösterilir.

Verilen A ve B kümeleri için üç durum söz konusu olup bu üç durum için A\B kümesi aşağıdaki Venn şemalarında taralı olan bölgedir.

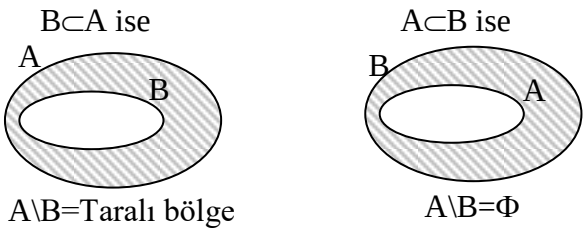
1)



2)

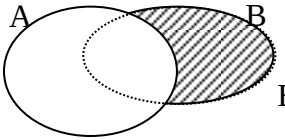


3)



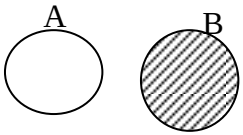
Aynı şekilde her bir durum için B\A kümesi de bulunabilir. B\A kümesi B de olup A da olmayan elemanlardan oluşan küme olacağından aşağıdaki durumlar söz konusudur.

1)



B\A=Taralı bölge

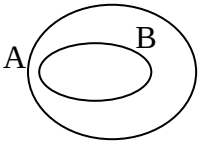
2)



B\A=B

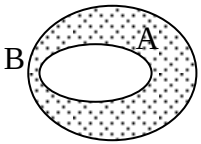
3)

A⊃B ise



B\A=Φ

B⊃A ise

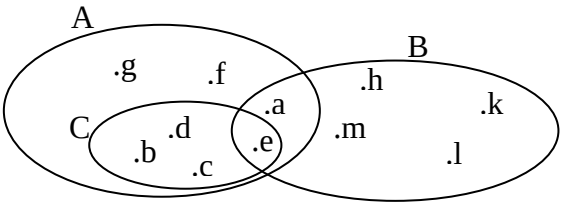


B\A=Taralı bölge

Örnek 10. A={a,b,c,d,e,f,g} , B={a,e,h,k,l,m} olsun. A\B={b,c,d,f,g}, B\A={h,k,l,m} olur. A\B kümesinde A nın B den farklı elemanları, B\A kümesinde de B nin A dan farklı elemanları vardır.

C={b,c,d,e} olsun. Bu durumda A\ C={a,f,g}, C\ A= { }= Φ ,

B\ C={a,h,k,l,m}, C\ B={b,c,d} olur. Venn şeması aşağıda verilmiştir:



1.4.5. İki Kümenin Kartezyen Çarpımı

A ve B herhangi iki küme olsun. $x \in A$ ve $y \in B$ olmak üzere oluşturulabilen $(x, y)=\{x,\{x,y\}\}$ kümesine *sıralı ikili*, (x, y) sıralı ikilisindeki x elemanına sıralı ikilinin *birinci bileşen*i, y elemanına sıralı ikilinin *ikinci bileşen*i denir.

(x, y) ve (u, v) sıralı ikililer olmak üzere

$$(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow x = u \text{ ve } y = v$$

olduğu kümelerin eşitliği tanımından kolayca bulunur. Yani iki sıralı ikilinin eşit olması için gerek ve yeter şart bileşen bileşene eşit olmalarıdır.

Örnek 11.

1) $(x, 4) = (3, u)$ ise $x = 3,\ u = 4$ dir.

2) $(3,5) \neq (5,3)$ ve $(-4,7) \neq (4,7)$ dir.

Tanım. A ve B herhangi iki küme olsun. $x \in A$ ve $y \in B$ olmak üzere oluşturulabilen tüm (x, y) sıralı ikililerinin kümesine A ve B kümelerinin *kartezyen çarpımı* denir ve bu küme $A \times B$ ile gösterilir.

A ve B kümelerinin kartezyen çarpım kümesi ortak özellik yöntemi ile $A \times B = \{(x,y) | x \in A\ ,\ y \in B\}$ olarak ifade edilebilir.

Örnek 12. $A=\{2, 4\}$ ve $B=\{m, n\}$ ise

$$A \times B=\{(2, m), (2, n), (4, m), (4, n)\}$$

ve

$$B \times A=\{(m, 2), (m, 4), (n, 2), (n,4)\}$$

olur.

Bu örnek ten görüleceği gibi genelde $A \times B \neq B \times A$ dır. Ancak A veya B den birisi Φ ise veya A=B ise eşitlik söz konusudur.

3. bölümde kartezyen çarpım üzerinde biraz daha ayrıntılı olarak durulacak ve bazı özellikleri verilecektir.

ALIŞTIRMALAR

1. $A=\{\Phi, 0, \{1\}, \{2, 3\}\}$ kümesi için aşağıdaki ifadeleri doğru olup olmadıklarını araştırınız:

i) $\{1\}\in A$ ii) $\{0\}\subset A$ iii) $\{\{2, 3\}\}\subset A$

iv) $\Phi\in A$ v) $\{0\}\in A$

2. $X=\{2, 3, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$ kümesi için aşağıdaki ifadelerin doğru olup olmadıklarını araştırınız:

i) $4\in X$ ii) $\{\{2, 3\}\}\subset X$ iii) $\{3, 4\}\subset X$

iv) $\{2, 4\}\subset X$ v) $\{2, 3\}\notin X$

3. $s(X)=22$, $s(Y)=42$ ve $s(X\cup Y)=45$ ise $s(X\cap Y)$ değerini hesaplayınız.

4. $A=\{2, 3\}$ ve $B=\{1, 3, 5\}$ kümeleri hem A yı hem de B yi kapsayan bir küme yazınız.

5. $X=\{0, 1, 2, 3\}$ ve $Y=\{1, 3\}$ kümeleri için $Y\subset Z\subset X$ olacak biçimde bir Z kümesi bulunuz.

6. $s(B)=5$ ise B kümesinin alt kümelerinin sayısı kaçtır?

7. $s(A)=6$ ise A nın öz alt kümelerinin sayısı kaçtır?

8. 128 tane farklı altkümeye sahip olan bir kümenin eleman sayısı kaçtır?

9. Özalt kümelerinin sayısı 255 olan bir kümenin eleman sayısı kaçtır?

10. 8 elemanlı bir kümenin 3 ve 3 den az elemana sahip kaç tane alt kümesi vardır?

11. 6 elemanlı bir kümenin 2 elemanlı kaç altkümesi vardır?

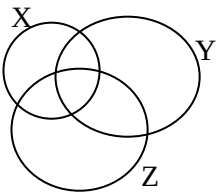
12. 32 farklı alt kümesi olan bir kümenin, elemanı 4 den az olan kaç tane alt kümesi vardır?

13. X, Y ve Z Venn şemasında verilen kümeler olmak üzere aşağıdaki kümeleri Venn şeması üzerinde tarayıp gösteriniz:

i) $(X\cap Y)\cup[(X\cup Y)\cap Z]$ ii) $(X\cup Y\cup Z)-(X\cap Y)$

iii) $(X\cup Y\cup Z)-(X\cap Y\cap Z)$ iv) $(X\cap Y)\cup Z-(X-Y)$

v) $(X\cup Y\cup Z)-[(X\cup Y)\cap Z]$



14. A ve B herhangi iki küme iken $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$ olup olmadığını araştırınız.

15. A ve B herhangi iki küme iken $A \cap B = \phi \Rightarrow B \subset A'$ olup olmadığını araştırınız.

16. X ve Y herhangi iki küme iken $X \cap C \subset Y \cap C$ olup olmadığını araştırınız.

17. C ve B herhangi iki küme iken $(C \cap B) \subset (C \cap A) \Rightarrow B \subset A$ olup olmadığını araştırınız.

18. A ve B herhangi iki küme iken $B \subset A \Rightarrow B \subset (A \cup C)$ olup olmadığını araştırınız.

19. $B \subset A$ ise $A \subset A \cup B$ olup olmadığını araştırınız.

20. $A=\{0, 1, 2, 4\}$ ve $B^T=\{1, 2, 3, 5, 6\}$ ise $(A \cup B)^T$ kümesini bulunuz.

21. $A=\{0, 1\}$, $B=\{2, 3, 4\}$, $C=\{4, 5, 6, 7\}$ ve $E=A \cup B \cup C$ evrensel küme olduğuna göre $A^T \cup (B \cap C^T)$ kümesini liste yöntemi ile yazınız.

22. Uluslar arası bir konferansta 8 kişi hem İngilizce hem de Fransızca konuşuyor, Sadece İngilizce konuşanlar, sadece Fransızca konuşanların iki katı ve konferansa katılanların tümü 62 kişi olduğuna göre, konferansta sadece Fransızca konuşan kaç kişi vardır?

23. "MEHMETÇİK" kelimesinin harflerinden oluşan kümenin alt kümelerinin sayısı kaçtır?

24. Bir A kümesinin eleman sayısı 2 arttırıldığında alt küme sayısı 128 artmaktadır. A kümesinin eleman sayısı kaçtır?

25. $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{2, 3, 4, 5\}$ olsun. $A \times A = A^2$, $A \times B$, $B \times A$, $B \times B = B^2$ kümelerini bulunuz.

2. BÖLÜM

SAYILAR

HEDEFLER

1. Toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerini yapabilme.
2. Üslü ve köklü sayılarla işlem yapabilme.
3. İkililik, sekizlik, onluk ve onaltılık sayı sistemlerinde verilen sayılarla ilgili işlemler yapabilme ve bu sistemler arasında sayıları dönüştürebilme.
4. Bölünebilme kurallarını kavrayabilme.

DAVRANIŞLAR

1. Sayma sayıları kümesini tanır ve eşyalar ile sayma sayıları arasındaki ilişkiyi kurar.
2. Doğal sayılar kümesini tanır ve yokluk kavramına karşılık gelen sayının ne olduğunu bilir.
3. Tamsayılar kümesini tanır ve borç verme-borç alma kavramlarına karşılık gelen negatif sayıları bilir.
4. Rasyonel sayılar kümesini tanır ve paylaşma kavramına karşılık gelen kesirli sayıları bilir.
5. Sayma sayılarından başlayıp rasyonel sayılar kümesine kadar olan bütün sayı kümelerini sistematik olarak kurabilir.
6. Rasyonel olamayan (irrasyonel) sayıların var olduğunu gösterebilir.
7. Reel (gerçel) sayılar kümesini rasyonel ve irrasyonel sayıların birleşimi olarak tanımlayabilir.
8. Reel sayılar kümesinin bir doğru üzerindeki bütün noktalarla birebir olarak eşlenebildiğini bilir.
9. Tüm sayı kümeleri üzerinde aritmetik işlemlerin kurallarını bilir ve uygular.
10. Üslü sayıları tanır ve üslü sayılarla ilgili aritmetik işlemleri yapar.
11. Rasyonel sayıların ondalıklı gösterimlerini bulur ve tersine ondalık gösterimi verilen rasyonel sayıyı elde eder.
12. Ondalık sayıları 10 tabanına göre üslü formda yazarak, işlemler yapar.
13. Üslü ve köklü sayılar arasındaki ilişkileri kurar ve uygulamalarda kullanır.
14. Bir reel sayının mutlak değerini tanımlar ve mutlak değer kavramını uygulamalarda kullanır.
15. Verilen bir doğal sayının 2, 3, 5, 7, 9, 10 ve 11 ile bölünüp bölünemeyeceğini bulur.

Bu bölümde sayı kavramına neden ihtiyaç duyulduğunu görecek ve bazı çok karşılaşılan sayı kümelerini tanıyacağız. Tek ve çift sayıları, asal sayıları ve bu sayıların bazı özelliklerini göreceğiz.

2.1. SAYI KÜMELERİ VE BAZI ÖZELLİKLERİ

Sayı kavramının tarih boyunca hem anlam hem de gösterim bakımından toplumdan topluma değiştiğine birçok kaynakta yer verilmektedir. İlk sayıların akşamları hayvanlarının tam olup olmadığını anlamak isteyen ilkel insanlar tarafından kullanıldığı iddia edilmektedir. Tabii ki bu insanlar henüz tam anlamıyla bir sayı kavramına sahip olmadıklarından, bu işi her hayvan için bir çakıl taşı kullanarak yapıyorlardı. Bu sayede çakıl taşları hayvanlara birebir eşlenmiş oluyordu. Daha sonraları ortaya çıkan ihtiyaçlar sonucu sayı kavramı da gelişmiş ve yeni sayı kümeleri ortaya çıkmıştır. Şimdi kısa kısa bu sayı kümelerinin ortaya çıkışına sebep olan ihtiyaçlardan bahsedelim.

İlk insanların yukarıda anlatılan şekilde karşılaştıkları sayma ihtiyacı bizim sayma sayıları adını verdiğimiz sayıları ortaya çıkarmıştır. Yani {1, 2, 3, 4, ... } kümesine *sayma sayıları kümesi*, bu kümenin her bir elemanına da bir *sayma sayısı* denilir.

Sıfır sayısının ortaya çıkışı ile ilgili çok sayıda iddia vardır. Sıfırın sayma sayıları kümesine katılması ile **N** ile göstereceğimiz ve *doğal sayılar kümesi* adını vereceğimiz yeni bir sayı kümesi elde ederiz. **N** kümesinin elemanlarına *doğal sayı* denilir. O halde

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ... \}$$

şeklindedir. Bazı kaynaklarda doğal sayılar kümesinin 1 sayısından başlatıldığını görebilirsiniz. Bu tamamen sıfır sayısının doğallıktan uzak olduğu düşüncesine dayanmaktadır. Halbuki sıfır her şeyin başlangıcı olarak belki de en doğal olan sayıdır. Sayma sayıları kümesi $\mathbf{N}^+$ ile gösterilebilir.

$x + 1 = 0$ denkleminin yukarıda tanımlanan sayı kümelerinde bir çözümünün olmadığı, yani daha net bir ifadeyle, hiçbir sayma sayısının veya hiçbir doğal sayının bir fazlasının 0 olamayacağı açıktır. Bu sayede *negatif sayma sayıları* ortaya çıkmıştır. Bu sayıların oluşturduğu küme de $\mathbf{N}^-$ ile gösterilir ve

$$\mathbf{N}^- = \{-1, -2, -3, -4, ...\}$$

şeklinde yazılır.

Genelde negatif sayma sayılarının doğal sayılara katılması ile elde edilen küme önemlidir.

$$\mathbf{Z} = \{ \dots , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

ile gösterilen bu kümeye *tamsayılar kümesi***,** elemanlarına da *tamsayı* denilir. **Z** yukarıda tanımlanan sayı kümelerinin tümünü kapsayan bir kümedir. Aslında

$$\mathbf{Z} = \mathbf{N}^- \cup \mathbf{N}$$

yazılabilir.

Tanım. n bir tamsayı olsun. Eğer n = r.s olacak şekilde r ve s tamsayıları bulunabiliyorsa r ve s sayılarına n nin *bölen*leri adı verilir. Aynı zamanda n sayısına r ve s ile *bölünebilir*dir denilir.

Bir n>1 tamsayısı bu şekilde 1 den büyük iki tamsayının çarpımı olarak yazılabiliyorsa n ye *birleşik sayı*, yazılamıyorsa *asal sayı* denilir. Bir başka deyişle bir asal sayı, 1 ve kendisi dışında hiçbir pozitif böleni olmayan sayıdır.

$$\mathbf{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, \dots\}$$

kümesindeki sayılar asal sayılardır. Bunlar dışında kalan birden büyük tüm sayılar ise birleşik sayılardır. Her birleşik sayının en az bir asal çarpanı olduğu bilinen bir sonuçtur.

Özel olarak 2 ile bölünebilen bir tamsayıya *çift,* diğerlerine ise *tek* tamsayılar adı verilir. Çift tamsayılar kümesi **Ç** veya **2Z** ile, tek tamsayılar kümesi ise **T** veya **2Z+1** ile gösterilir. k bir tamsayı olmak üzere bir çift sayı 2.k şeklinde , bir tek sayı ise 2.k + 1 veya 2.k - 1 şeklinde ifade edilebilir. Örneğin, -18, -4, -2, 0, 2, 4, 10 çift sayılar, -5, -1, 1, 7, 11 tek sayılardır. Burada dikkat edilmesi gereken 0 = 2.0 olarak da yazılabilen sıfırın çift sayı olduğudur.

$$\mathbf{Z} = \mathbf{T} \cup \mathbf{Ç} = \mathbf{2Z} \cup \mathbf{(2Z+1)}$$

yazılabileceğine dikkat ediniz.

Tanıma dikkat edilirse 2 dışında tüm asal sayılar tektir. (Ödev: 2 den büyük bir çift tamsayı alarak bunun asal olamayacağını ispatlayınız).

Asal sayılar tarih boyunca oldukça ilgi çekmişlerdir. Toplam kaç tane asal sayı olduğu, asal sayıları veren bir formülün var olup olmadığı, verilen bir sayıdan küçük olan ya da iki sayı arasında kalan kaç tane asal sayı olduğu gibi daha birçok soru uzun yıllar birçok matematikçiyi meşgul etmiştir. Bu sorulardan sadece ilki cevaplanabilmiş olup diğerleri ile ilgili küçük denemeler dışında hiçbir olumlu gelişme olmamıştır. Aslında sayılar büyüdükçe bu sayıları bölebilecek küçük sayıların da çoğalacağı ve bu sebeple belli bir sayıdan sonra artık asal sayı mevcut olmayacağı fikri hiç de mantıksız değildir. Ancak bu doğru da değildir. Asal sayıları ve bölünebilme kavramını daha iyi anlamak amacı ile sonsuz çoklukta asal sayının varolduğu sonucunun birçok ispatından birini görelim.

***Teorem.** Sonsuz çoklukta asal sayı mevcuttur.

İspat. Bu teoremi matematikteki en güzel ispat metotlarından birisi olan tersini kabul ederek çelişki elde etme yöntemini kullanarak ispatlayacağız.

Tersine sadece sonlu sayıda asal sayı bulunduğunu kabul edelim. Bunlar $p_1, p_2, \ldots, p_k$ olsun. Bütün bu sayılardan daha büyük olan yeni bir sayı tanımlayalım:

$$A = p_1 . p_2 . \ldots . p_k + 1.$$

A sayısı mevcut olan bütün asal sayılar olan $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ile bölündüğünde hep 1 kalanını vermektedir. Yani hiçbir asal sayıya tam bölünmemektedir. Başka bir deyişle hiçbir asal çarpanı yoktur. O halde A bir asal sayıdır. Ancak varsayımımıza göre varolan bütün asal sayılar $p_1, p_2, \ldots, p_k$ dan ibaretti ve biz buna rağmen bunlardan daha büyük bir asal sayının var olduğunu göstermiş olduk. Bu da varsayımımızla çelişmektedir. O halde sonlu tane asal sayı olduğu varsayımımız yanlıştır. Yani sonsuz çoklukta asal sayı mevcuttur.

Bir n sayısının kendisi ile çarpımı kısaca $n^2 = n.n$ ile gösterilir ve "n kare" diye okunur. İleride üslü sayıları öğrendiğimizde bu sayıların özelliklerini ayrıntıları ile göreceğiz.

Küçük bir alıştırma olarak tek ve çift sayıların karelerini belirleyelim:

Örnek 1: Çift bir sayının karesinin çift, tek bir sayının karesinin de tek olduğunu gösterelim.

Eğer n çift ise, k bir tamsayı olmak üzere n = 2.k şeklinde yazılabileceğini görmüştük. O halde

$$n^2 = (2.k)^2 = 4.k^2 = 2.\underbrace{(2k^2)}_{\in Z} \in \mathbf{2Z=Ç}$$

olur. Yani n^2 sayısı da bir çift tamsayıdır.

İkinci olarak n bir tek sayı olsun. Bu durumda k yine bir tamsayı olmak üzere n = 2.k+1 yazılabileceğinden

$$n^2 = (2.k+1)^2 = 4.k^2 + 4.k + 1 = 2.\underbrace{(2k^2 + 2k)}_{\in Z} + 1 \in \mathbf{2Z+1=T}$$

olacaktır.

Tamsayı katsayılı 2x –1 = 0, 3x + 2 = 4 gibi denklemlerin tamsayılar kümesinde çözüme sahip olmadığını kolayca görebiliriz. Bu tür denklemlerin çözümlerinin tamsayılara katılması ile elde edilecek daha geniş kümeye *rasyonel sayılar kümesi* denilir. **Q** ile gösterilir. **Q** nun elemanlarına da *rasyonel sayılar* denilir. Dikkat edilirse rasyonel sayılar iki tamsayının bölümü şeklindeki sayılardır. Dolayısıyla **Q** kümesini

$$\mathbf{Q} = \{p/q \mid p \text{ ve } q \text{ aralarında asal tamsayılar}, q \neq 0\}$$

şeklinde ifade etmek oldukça kullanışlıdır. Burada bahsedilen p ve q sayılarının aralarında asal olmaları 1 sayısı dışında hiçbir ortak bölenleri olmadığı anlamına gelir. Bir çok kaynak rasyonel sayılar kümesini tanımlarken aralarında asal olma şartını aramamaktadır. Ancak bu şart ispatlarda kullanılmaktadır ve oldukça önemlidir. Biz b≠0 olmak üzere a/b şeklinde herhangi iki tamsayının oranı olarak ifade edilebilen sayılara *kesir* adını vereceğiz. Bu tanıma göre bir kesrin ancak en sade şekli bir rasyonel sayı olmaktadır. Örneğin

$$\frac{48}{72}=\frac{42}{63}=\frac{40}{60}=\frac{30}{45}=\frac{20}{30}=\frac{16}{24}=\frac{12}{18}=\frac{10}{15}=\frac{8}{12}=\frac{6}{9}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

sayılarının hepsi birer kesir olup bunlardan sadece 2/3 bir rasyonel sayıdır.

Bir rasyonel sayının payını paydasına bölmekle elde edilen sayıya verilen rasyonel sayının *ondalık yazılım*ı denir. Her rasyonel sayının bir ondalık açılımı vardır. Örneğin, ½ = 0.5, 1/3 = 0.3333..., ¼ = 0.25, 1/5 = 0.2, 1/6 = 0.16666..., 1/7 = 0.1428571428571..., 1/8 = 0.125, 1/9 = 0.1111...., 1/10 = 0.1, 2/3 = 0.6666..., 2/5 = 0.4, 3/8 = 0.375, 5/2 = 2.5, 7/3 = 2.3333..., 11/4 = 2.75, 28/27 = 1.037037037... gibi. Ancak her bir ondalık sayı her zaman bir rasyonel sayı belirtmeyebilir. Bunu daha ayrıntılı olarak irrasyonel sayıları öğrendikten sonra göreceğiz.

Ondalık açılımında sürekli olarak tekrar eden bir rakam ya da rakamlar dizisi bulunan rasyonel sayıları kısaca tekrar eden (devreden) kısmı bir kez yazarak ve üstüne bir çizgi çizerek belirtebiliriz. Rasyonel sayıların bu gösterimine *devirli gösterim* ya da *devirli sayı* denilir.

Örneğin $0.347\overline{52}$ = 0.347525252..., $3.24\overline{187}$ = 3.24187187187..., $0.\overline{4}$ = 0.444..., $2.\overline{71}$ = 2.717171... birer devirli sayıdır.

Bir rasyonel sayının devirli açılımı varsa bunu bölme yoluyla elde ederiz. Ancak tersine işlem yapmak, yani devirli sayı olarak verilen bir rasyonel sayıyı belirlemek daha zordur. Bunu belirlemek için verilen sayı 10 un kuvvetleri ile virgül devirli kısmın sağına ve soluna gelecek şekilde çarpılır. Daha sonra elde edilen iki sayı birbirinden çıkarılarak devreden kısmın yok olması sağlanır.

Örnek 2: $0.24\overline{67}$ sayısının hangi rasyonel sayıya karşılık geldiğini bulalım.

$x = 0.24\overline{67}$ diyelim. Bu durumda

$$\begin{array}{rl} 10000.x = & 2467.\overline{67} \\ -\quad 100.x = & 24.\overline{67} \\ \hline 9900.x = & 2467-24 = 2443 \end{array}$$

ve böylece

$$x = \frac{2443}{9900}$$

elde edilir.

Örnek 3: $y = 3.5\overline{93}$ sayısına karşılık gelen rasyonel sayıyı bulalım.

$$\begin{array}{rl} & 1000y = 3593.\overline{93} \\ - & 10.y = 35.\overline{93} \\ \hline & 990.y = 3593\text{-}35 = 3558 \end{array}$$

ve buradan da

$$y = \frac{3558}{990}$$

elde edilir.

Bu iki örnekten kolayca anlaşılacağı gibi, devirli bir sayıyı rasyonel hale getirmek için aşağıda verilen pratik kural kullanılabilir.

<u>Kural:</u> Devirli bir sayıyı rasyonel hale getirmek için önce devirli sayıdaki devir çizgisi yok kabul edilip bulunan sayıdan devretmeyen kısım çıkarılır, sonra bulunan bu sayı devreden basamak sayısı kadar 9 ve virgülün sağında kalan devretmeyen basamak sayısı kadar 0 ların yan yana konulması ile bulunan sayıya bölünür.

Eğer bu kural hatırlanırsa her seferinde yukarıdaki işlemleri yapmaya gerek kalmayacaktır. Şimdi bu kurala bazı örnekler verelim:

Örnek 4: $1.2\overline{34}$ ve $2.00\overline{436}$ devirli sayılarını rasyonel biçime getirelim. Yukarıda verilen kural gereği,

$$1.2\overline{34} = \frac{1234 - 12}{990} = \frac{1222}{990} = \frac{611}{495}, \quad 0.\overline{9} = \frac{9}{9} = 1,$$

$$2.00\overline{436} = \frac{200436 - 200}{99900} = \frac{200236}{99900} = \frac{100118}{49950} = \frac{50059}{24975}$$

olacaktır.

Şimdi rasyonel sayılar kümesinde dört işlemin nasıl tanımlandığına bakalım. *a/b ve c/d* iki rasyonel sayı olmak üzere bu iki sayının toplamı, farkı, çarpımı ve bölümü sırasıyla

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd},$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

formülleri ile hesaplanır. Burada paydadaki sayıların sıfırdan farklı olmaları gerektiği açıktır.

Örnek 5:

$$\frac{2}{3} + \frac{7}{4} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{7 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{8}{12} + \frac{21}{12} = \frac{8+21}{12} = \frac{29}{12}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 4} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6} \quad \text{ve} \quad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{4}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 7} = \frac{8}{21}$$

olur.

Tanım. a ve $b \neq 0$ tamsayıları için $\frac{a}{b}$ kesrinde $a > b$ ise $\frac{a}{b}$ kesrine *bileşik kesir*, $a < b$ ise $\frac{a}{b}$ kesrine *basit kesir* adı verilir. ($a = b$ ise $\frac{a}{b} = \frac{a}{a} = 1$ olacağı açıktır).

Sayı ekseni üzerinde rasyonel sayıları işaretlemeye kalkarsak birçok problemle karşılaşırız. İlk olarak hangi rasyonel sayıdan başlanacağı bunlardan biridir. Daha da önemlisi rasyonel sayıları neye göre sıralayıp sayı eksenine dizebiliriz? Bu işlem tamsayılarda olduğu kadar basit değildir. Aslında her bir tamsayı paydası 1 olan bir rasyonel sayı olarak düşünülebileceğinden

$$\mathrm{Z} \subset \mathrm{Q}$$

yazılabilir. Dolayısıyla rasyonel sayılar tamsayılardan çok daha fazladır. Örneğin 0 ile 1 arasındaki rasyonel sayıları sayı eksenine yerleştirmeye çalışırsak, bunların hepsinin birer basit kesir (payı paydasından küçük olan kesir) olacağını ve bu şekilde sonsuz çoklukta bu özelliğe sahip rasyonel sayı bulabileceğimizi görürüz. 1 birim uzunluğundaki (0,1) aralığına sonsuz çok-

lukta rasyonel sayıyı yerleştirdiğimizde hiç boş yer kalmayacağı düşünülecektir. Ancak bu doğru değildir. Aslında ne kadar rasyonel sayı varsa o kadar da boşluk olacaktır. Bunun sebebi *irrasyonel sayılar* adını verdiğimiz ve sayı ekseni üzerinde bir rasyonel sayı olarak ifade edilemeyen sayılar olarak tanımlanan sayıların varlığıdır. *İrrasyonel sayılar kümesi* genelde **Q′** ile gösterilir. Bu sayılara örnek olarak $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$, ... gibi içi bir tam kare olmayan köklü sayıları ve e = 2.718281828..., π = 3.141592653589... gibi bazı özel sayıları verebiliriz. Bu sayıların ortaya çıkışı ile ilgili pek çok iddia mevcuttur. Örneğin $\sqrt{2}$ sayısının bir karenin köşegen uzunluğunun kenar uzunluğuna oranını bulmak isteyen Pythagoras (Pisagor) tarafından ortaya çıkarıldığı bunlardan biridir. İrrasyonel sayıların rasyonel sayılardan nasıl ayırt edilebileceğine geçmeden önce bir örnek olarak $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel olmadığını ispatlayalım. Bu sayede irrasyonel sayıların gerçekten varolduğunu da görmüş olacağız.

Örnek 6: $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel olmadığını, bir başka deyişle irrasyonel olduğunu gösterelim.

Tersine $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel olduğunu varsayalım. Tanım gereği

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

yazılabilecek şekilde p ve q (q≠0) tamsayıları vardır. Buradan

$$p = \sqrt{2}\,.q$$

veya iki tarafın karesi alınarak

$$p^2 = 2.q^2$$

bulunur. O halde 2 ile bölünebilen p^2 sayısı çift bir sayıdır. Bu da ancak p nin çift sayı olmasıyla mümkündür. Bu yüzden m bir tamsayı olmak üzere p = 2.m şeklinde de ifade edilebilir. Bu sonuç son eşitlikte yerine konulduğunda

$$(2.m)^2 = 4.m^2 = 2.q^2,$$

ve buradan da

$$2.m^2 = q^2$$

elde edilir. Bu da yukarıdaki gibi önce q^2 nin ve dolayısıyla da q nun çift olduğu anlamına gelir.

Sonuç olarak, aralarında asal olduklarını varsaydığımız p ve q sayılarının ikisinin de çift oluşu, varsayımımızla çelişir. Dolayısıyla $\sqrt{2}$ rasyonel bir sayı değildir ve tanım gereği irrasyoneldir.

Şimdi rasyonel sayılar ile irrasyonel sayıları nasıl ayırt edebileceğimizi anlamaya çalışalım. Bunun için tek ihtiyacımız olan şey bu sayıların ondalık açılımlarıdır. Rasyonel sayılar kısmında her bir rasyonel sayının bir ondalık yazılımının varolduğunu görmüştük. Bu ondalık açılımların virgülden sonraki kısımlarını düşünelim. Bu ondalık kısımlar ya sonlu sayıda basamaktan oluşmaktadır, ya da bir veya birkaç rakamın artarda dizildiği bir sayı dizisinin sonsuz çoklukta tekrarından oluşmaktadır. Tekrar eden bu sayı dizisi en fazla paydadaki sayı kadar basamağa sahip olabilir. Bunu çeşitli rasyonel sayıların payını paydasına bölerek görmeye çalışmak konuyu anlamak açısından oldukça faydalı olacaktır. Örneğin 1/17 = 0.058823529411764700588235... ondalık açılımında 05882352941176470 şeklindeki 17 basamaklı sayı dizisi tekrar etmektedir ve bölmenin her adımında 0 ile 17 arasında bir kalan elde edilir. Daha önce elde edilmiş bir kalan elde ettiğimizde ise başa dönmüş oluruz ve bölümdeki basamaklar tekrar etmeye başlar.

İrrasyonel sayıların iki tamsayının bölümü olarak ifade edilemeyen sayılar olarak tanımlandığını hatırlayınız. Dolayısıyla gerçek değerlerinin bölme yoluyla ondalıklı sayı olarak elde edilemeyecekleri de açıktır. İrrasyonel sayıların yaklaşık ondalık değerleri çeşitli yöntemlerle elde edilir. Bazı çok karşılaşılan irrasyonel sayıların ondalık açılımları $\sqrt{2}$ = 1.414213562..., $\sqrt{3}$ = 1.732050808... , π = 3.141592654..., e = 2.718281828... biçimindedir. Bunlardan $\sqrt{2}$ sayısını ele alalım. Eğer bu bölme yapılarak elde edilebilseydi o zaman 1 den sonra 4 sonra 1 sonra yine 4 bulunuşu sıradaki basamakların yine artarda 1 ve 4 lerden oluşacağını gösterirdi. Halbuki burada 1.414 den sonra 213... gelmektedir. Diğer sayılarda da benzeri durum söz konusudur. İşte bu irrasyonel ve rasyonel sayılar arasındaki farktır.

İrrasyonel sayılar acaba hangi sıklıkta sayı eksenini doldururlar? Bu soruyu aşağıdaki teorem yardımıyla cevaplayabiliriz.

Teorem.

(a) İki rasyonel sayının toplamı, farkı, çarpımı ve paydadaki rasyonel sayı 0 olmadıkça bölümleri yine bir rasyonel sayıdır.

(b) İki irrasyonel sayının toplamı, farkı, çarpımı ve bölümü rasyonel veya irrasyonel olabilir.

(c) Bir rasyonel sayı ile bir irrasyonel sayının toplamı, farkı, çarpımı ve bölümü irrasyoneldir.

(d) İki rasyonel sayı arasında sonsuz çoklukta rasyonel sayı mevcuttur.

(e) İki irrasyonel sayı arasında sonsuz çoklukta irrasyonel sayı mevcuttur.

İspat. (a) Bu özellik işlemlerin yukarıda verilen tanımlardan kolayca görülür.

(b) Bunu birkaç örnekle görebiliriz. Örneğin $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ irrasyonel , $(\sqrt{5}+1)+(3-\sqrt{5})=4$ rasyonel, $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ irrasyonel, $(\sqrt{5}+2)-(\sqrt{5}-4)=6$ rasyonel, $\frac{3}{7}(\sqrt{5})=\frac{3\sqrt{5}}{7}$ irrasyonel, $(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)=4$ rasyonel, $\frac{\sqrt{5}}{2}$ irrasyonel, $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=2$ rasyoneldir. Buradaki işlemler köklü sayıların özellikleri işlendikten sonra daha iyi anlaşılabilir.

(d) a ve b iki rasyonel sayı olsun. İddia ediyoruz ki a ile b arasında en az bir rasyonel sayı vardır. Aslında bu sayı $\frac{a+b}{2}$ olarak alınabilir. Çünkü $a \le \frac{a+b}{2} \le b$ dir. (a) gereği $\frac{a+b}{2}$ de bir rasyonel sayıdır. Benzer şekilde a ile $\frac{a+b}{2}$ arasında da bir rasyonel sayı (örneğin $\frac{a+\frac{a+b}{2}}{2}=\frac{3a+b}{4}$) ve $\frac{a+b}{2}$ ile b arasında da bir rasyonel sayı (örneğin $\frac{\frac{a+b}{2}+b}{2}=\frac{a+3b}{4}$) mevcuttur. Yani rasyonel sayılardan oluşan

$$a \leq \frac{3a+b}{4} \leq \frac{a+b}{2} \leq \frac{a+3b}{4} \leq b$$

sayı dizisi elde edilir. Bu işlem sonsuz çoklukta devam ettirilebilir ve sonuçta *a* ile *b* arasında kalan sonsuz çoklukta rasyonel sayı oluşturulmuş olur.

(c) ve (e) şıkları da benzer biçimde gösterilebilir.

Bu teorem sayesinde sayı ekseninin rasyonel ve irrasyonel sayılar ile dolu olduğunu görürüz.

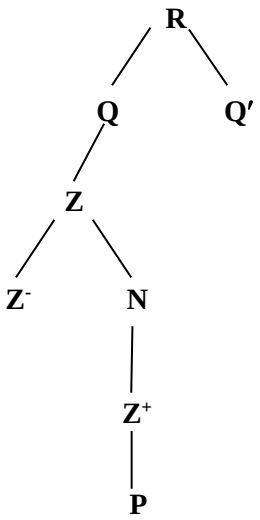
***Tanım.** Katsayıları rasyonel sayılar olan bir polinomun kökü olan sayılara *cebirsel sayı*, bu özelliğe sahip olmayan sayılara da *cebirsel olmayan* (*transandant*) *sayı* denilir.

***Örnek 7:** 1, 1/3, $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{5}$ sayıları birer cebirsel sayıdır. Çünkü bu sayılar sırasıyla x-1, 3x-1, x^2-2, x^2-7, x^3-5 polinomlarının kökleridir. Ancak e ve π sayısı ve bunların toplamı, farkı, çarpımı, bölümü ve kuvvetleri olarak ifade edilebilecek bir çok sayı katsayıları rasyonel sayılar olan bir polinomun kökleri olarak elde edilemez.

***Sonuç:** Bütün rasyonel sayılar cebirseldir, ama bütün irrasyonel sayılar cebirsel olmak zorunda değildir.

Bundan böyle sayı eksenini dolduran rasyonel ve irrasyonel sayıların bütününe *reel* (*gerçel*) *sayılar* diyeceğiz. Yani bir reel sayı ya rasyonel ya da irrasyoneldir. Bu sebeple sayı eksenine genelde *reel eksen* de denilir. Reel sayılar kümesi **R** ile gösterilir ve şimdiye kadar gördüğümüz tüm sayı kümelerini kapsamaktadır.

Aşağıda şimdiye dek gördüğümüz sayı kümelerinin birbirini kapsamasına göre düzenlenmiş bir şekil verilmektedir:



Şekil 1.
Sayı kümeleri arasındaki ilişkiler

a ve b gibi iki reel sayı verildiğinde üç durum söz konusudur:

(1) Sayı ekseninde a, b nin solundadır. Bu durum $a < b$ ile gösterilir ve "*a küçüktür b*" şeklinde okunur. Eğer $a\text{-}b < 0$ ise bu durum söz konusu olur.

(2) a ile b aynı yerdedir. Bu durum $a = b$ ile gösterilir ve "*a eşittir b*" şeklinde okunur. Bu durum için gerek ve yeter şart ise $a\text{-}b = 0$ olmasıdır.

(3) A, b nin sağındadır. Bu durumda $a>b$ yazılır ve "*a büyüktür b*" diye okunur. $a\text{-}b > 0$ iken bu durum ortaya çıkar.

Reel sayılarda eşitlik ve sıralama ilgili bazı özellikleri aşağıdaki teoremler ile ispatsız olarak veriyoruz:

***Teorem.** a, b, c reel sayılar olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(1) $a = b$ veya $a \neq b$,

(2) $a = a$,

(3) $a = b \Rightarrow b = a$,

(4) $a = b$ ve $b = c$ ise $a = c$,

(5) $a = b \Leftrightarrow a \pm c = b \pm c$,

(6) $a = b \Leftrightarrow a.c = b.c \quad (c \neq 0)$,
(7) $a + b = b + a$,
(8) $a + (b + c) = (a + b) + c$,
(9) $a + 0 = 0 + a = a$,
(10) $a.1 = 1.a = a$,
(11) $a.b = b.a$,
(12) $a.(b.c) = (a.b).c$,
(13) $a.(b + c) = a.b + a.c$,
(14) $(a+b).c = a.c + b.c$.

***Teorem.** a, b, c reel sayılar olsun.

(1) $a = b$, $a < b$ veya $a > b$,
(2) $a < b$ *ve* $c > 0$ ise $a.c < b.c$,
(3) $a < b$ ve $c < 0$ ise $a.c > b.c$,
(4) $a < b$ ve $c > 0$ ise $a:c < b:c$,
(5) $a < b$ ve $c < 0$ ise $a:c > b:c$,
(6) $a < b$ ve $b < c$ ise $a < c$,
(7) $a < b$ ve $c < d$ ise $a \pm c < b \pm d$,
(8) $a^2 < a$ ise $0 < a < 1$,
(9) $a^2 > a$ ise $a < 0$ veya $a > 1$. □

Reel sayılar dışında da sayılar mevcuttur. Örneğin 9. bölümde detaylı olarak verilecek olan kompleks sayılar bunlardan biridir.

2.2. ÜSLÜ VE KÖKLÜ SAYILAR

Bu bölümde daha önce çok kısa bir biçimde tanıdığımız üslü ve köklü sayıları daha yakından tanıyacağız. Bu sayılarla yapılan işlemler bir çok alanda karşımıza çıkacağından bunları iyi anlamakta fayda vardır.

Tanım. a bir reel sayı ve m pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$a^m = \underbrace{a.a\ldots a}_{m \text{ tane}}$$

biçiminde tanımlanan sayıya *a nın m-inci kuvveti* denir ve *a* ya *taban*, *m* ye *üs* (*kuvvet*) adı verilir.

Örneğin, $3^2 = 9$, $4^3 = 64$, $2^5 = 32$, $2^{10} = 1024$, $5^1 = 5$ gibi.

Tanım. *a* sıfırdan farklı bir reel sayı ve *m* pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m$$

olarak tanımlanır.

Burada 0^0 ın tanımlanamadığına dikkat ediniz.

Üslü sayıların başlıca özelliklerini ispatsız olarak aşağıdaki teorem ile veriyoruz. Aslında bu özelliklerin ispatları, yukarıda verilen tanımlar yardımıyla kolayca yapılabilir.

Teorem. Her a,b sıfırdan farklı reel sayısı ve m,n tamsayıları için

$$a^m.a^n = a^{m+n},$$

$$(a^m)^n = a^{m.n},$$

$$(a.b)^m = a^m.b^m,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m},$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

$$a^{2n} > 0$$

bağıntıları geçerlidir. Bu bağıntılar yukarıdaki tanımlar yardımıyla kolayca ispatlanabilir.

Teoremde verilen son özellik çift kuvvetli bir sayının daima pozitif olduğunu göstermektedir. Sondan bir önce verilen özellikte m = n alarak

$$1 = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$$

olduğu elde edilir. Teoremin kabulünden dolayı $a \neq 0$ olduğundan bu, sıfırdan farklı bir reel sayının sıfırıncı kuvvetinin 1 olduğunu gösterir. $a = 0$ iken ortaya çıkan 0^0 ise tanımsız (belirsiz) olarak kabul edilir.

Örnek 1: $2^{-3}.2^{-2} = 2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$,

$(2^{-2})^{-3} = 2^6 = 64$,

$(2.3)^{-3} = 6^{-3} = \frac{1}{6^3}$,

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \frac{2^{-5}}{3^{-5}} = \frac{3^5}{2^5} = \left(\frac{3}{2}\right)^5$,

$\frac{5^{-12}}{5^{-5}} = 5^{-12-(-5)} = 5^{-7} = \frac{1}{5^7}$.

Şimdi de köklü sayılar hakkında biraz daha ayrıntılı bilgiler vereceğiz. Hatırlanacağı gibi

$$(-2)^2 = 2^2 = 4,\ (-3)^2 = 3^2 = 9 \text{ ve } (-4)^2 = 4^2 = 16$$

şeklindeki örnekler çoğaltılabilir. Buradan görülüyor ki karesi örneğin 4 olan iki reel sayı vardır ve bunlar birbirinin ters işaretlisidir. Acaba karesi –4 olan kaç sayı vardır? Üslü sayılarda gördük ki çift kuvvetler daima pozitiftir. O halde karesi –4 olan bir reel sayı bulunamaz. Bu nedenle aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım. *a* pozitif bir reel sayı ise karesi *a* ya eşit olan iki tane reel sayı vardır. Bunlardan pozitif olanına *a nın karekökü* denir ve $\sqrt{a}$ ile gösterilir.

Örneğin $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$ gibi.

Uyarı. Karekökün negatif olamayacağı karekök tanımından açıktır.

Karekökün bazı özellikleri aşağıdaki gibidir.

Teorem. *a* ve *b* negatif olmayan iki reel sayı ve *n* bir pozitif tamsayı olsun. Bu durumda

(a) $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{a.b}$,

(b) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$,

(c) $\sqrt{a^n} = \sqrt{a}^{\,n}$,

(d) $x\sqrt{a} \pm y\sqrt{a} \pm z\sqrt{a} = (x \pm y \pm z)\sqrt{a}$

eşitlikleri gerçeklenir.

Bu teoremdeki sonuçları okuyucu tanım yardımıyla kolayca ispatlayabilir. Biz teoremdeki özelliklere örnekler vermekle yetiniyoruz.

Örnek 2:

(1) $\sqrt{3}.\sqrt{2} = \sqrt{6}$ **,**

(2) $3\sqrt{2}.5\sqrt{2} = 15\sqrt{4} = 15.2 = 30,$

(3) $2\sqrt{3}.3\sqrt{27} = 6\sqrt{81} = 6.9 = 54,$

(4) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}.\sqrt{\dfrac{9}{8}}.\sqrt{\dfrac{16}{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}.\dfrac{9}{8}.\dfrac{16}{3}} = \sqrt{4} = 2,$

(5) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3,$

(6) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 3\sqrt{3} - \dfrac{3\sqrt{3}}{4} = \dfrac{11\sqrt{3}}{4}$,

(7) $\sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{12} + \sqrt{27} = \sqrt{25.3} + \sqrt{16.3} - \sqrt{4.3} + \sqrt{9.3}$

$= 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$

$= 10\sqrt{3}$,

(8) $\sqrt{49.10^{-4}} = \sqrt{\dfrac{49}{10^4}} = \dfrac{7}{10^2} = \dfrac{7}{100}$.

Tanım. a ve b negatif olmayan reel sayıları için $\sqrt{a}$ nın *eşleniği* $\sqrt{a}$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ nin *eşleniği* $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ve $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ nin *eşleniği* $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ dir.

Kareköklü bir ifadeyi eşleniği ile çarptığımızda elde edilecek sonuç rasyoneldir. Hesaplama yaparak $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$ olduğu kolayca görülür. Genellikle bir kesrin paydasında köklü sayı olması istenmeyen bir durum olduğundan bu tür kesirlerin pay ve paydası, paydanın eşleniği ile çarpılarak kesir genişletilir.

Örnek 3 : (1) $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$,

$(\sqrt{2})$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

$(\sqrt{3})$

(3) $\dfrac{4}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{4.(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \dfrac{4.(\sqrt{2}+1)}{2-1} = 4(\sqrt{2}+1)$,

$(\sqrt{2}+1)$

(4) $\dfrac{24}{\sqrt{3}-2\sqrt{2}} = \dfrac{24.(\sqrt{3}+2\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-2\sqrt{2})(\sqrt{3}+2\sqrt{2})} = \dfrac{24.(\sqrt{3}+2\sqrt{2})}{3-8} = -\dfrac{24(\sqrt{3}+2\sqrt{2})}{5}$

$(\sqrt{3}+2\sqrt{2})$

Şimdi de sık karşılaşılan ve pratik yolu bilinmezse çok işlem gerektiren bir köklü sayı biçimini ele alalım. Bu sayı $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ biçiminde ifade edilebilen herhangi bir sayı olabilir. Bu şekilde bir sayı karşımıza çıktığında $a\pm\sqrt{b}$ nin kök dışına çıkabilmesi için bir tam kare olması gerektiği aşikardır. Eğer verilen ifade $\sqrt{a\pm 2\sqrt{m}}$ şekline dönüştürülebilirse çarpımları m, toplamları a olan iki sayı bulmaya çalışırız. Bu sayılar x ve y ise ($x > y$), bu durumda

$$\sqrt{a \pm 2\sqrt{m}} = \sqrt{(x+y) \pm 2\sqrt{xy}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$$

olacaktır.

Örnek 4: $\sqrt{7+2\sqrt{12}}$ sayısını hesaplayalım. Bunun için çarpımları 12 toplamları 7 olan iki sayı bulmalıyız. Bu sayılar 4 ile 3 tür. Dolayısıyla

$$\sqrt{7+2\sqrt{12}} = \sqrt{(4+3)+2\sqrt{4\cdot 3}} = \sqrt{4}+\sqrt{3}$$

bulunur. Benzer olarak

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3}-\sqrt{2},$$

$$\sqrt{6-\sqrt{20}} = \sqrt{6-\sqrt{4.5}} = \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{5}-\sqrt{1} = \sqrt{5}\ -1,$$

$$\sqrt{10+4\sqrt{6}} = \sqrt{10+2.2\sqrt{6}} = \sqrt{10+2\sqrt{4.6}} = \sqrt{6}+\sqrt{4}$$

$$= \sqrt{6}\ +2,$$

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{2+\frac{2}{2}\sqrt{3}} = \sqrt{2+2\sqrt{\frac{3}{4}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$$

olduğu görülür.

Buraya kadar karekök ile ilgili temel bilgi ve kuralları verdik. Şimdi de köklü sayıların genel bir incelemesini yapacağız

Tanım. *n* ikiden büyük bir tamsayı olmak üzere bir *a* reel sayısı için

$$x^n = a$$

eşitliğini sağlayan bir *x* reel sayısı bulunabiliyorsa *x* değerine *a sayısının n inci kuvvetten bir kökü* denilir. $x = \sqrt[n]{a}$ ile gösterilir. $n = 2$ iken $\sqrt[2]{a}$ yerine kısaca $\sqrt{a}$ yazılır.

n tek iken $x^n = a$ olacak biçimde bir tek x reel sayısı vardır. n çift iken a pozitif ise birbirinin ters işaretlisi olan iki x sayısı bulunur. Eğer a negatif ise bu özellikte bir x reel sayısı bulunamaz. Örneğin $\sqrt{-1}$, $\sqrt[4]{-64}$, $\sqrt[6]{-16}$ sayıları reel sayılar değildir. Özel olarak $\sqrt{a}$ sayısına *a nın karekökü* veya *karekök a*, $\sqrt[3]{a}$ sayısına *a nın küp kökü* veya *küp kök a* adı verilir.

Benzer olarak bir a^m *reel sayısının n inci kuvvetten kökü* de

$$x^n = a^m$$

eşitliğini sağlayan (eğer varsa) bir x reel sayısı olarak tanımlanır ve $\sqrt[n]{a^m}$ sembolü ile gösterilir. Eğer $k = m/n$ denirse $m = k.n$ olur ve bu değer $\sqrt[n]{a^m}$ ifadesinde yerine konursa

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{k.n}} = \sqrt[n]{(a^k)^n} = a^k = a^{m/n}$$

olduğu görülür. Bu nedenle köklü sayıları birer üslü sayı olarak düşünmek mümkündür. Örneğin $\sqrt{3} = 3^{1/2}$, $\sqrt[3]{4} = 4^{1/3}$, $\sqrt[5]{2^3} = 2^{3/5}$, $\sqrt[7]{3} = 3^{1/7}$, $\sqrt[6]{3^3} = 3^{3/6} = 3^{1/2}$ olur.

Aşağıdaki teorem köklü sayıların bazı önemli özelliklerini vermektedir. Bu özelliklerin ispatları basit hesaplamalarla kolayca yapılabileceğinden biz teoremi ispatsız olarak vereceğiz.

Teorem. a, b, x, y, z uygun reel sayılar ve n bir doğal sayı olmak üzere aşağıdaki özellikler geçerlidir:

(1) $\sqrt[n]{a^n.b} = a.\sqrt[n]{b}$,

(2) $\sqrt[n]{a^{m.n}} = a^m$,

(3) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$,

(4) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$,

(5) $x\sqrt[n]{a} \pm y\sqrt[n]{a} \pm z\sqrt[n]{a} = (x \pm y \pm z).\sqrt[n]{a}$,

(6) $\sqrt[n]{a}\,.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$,

(7) $\sqrt[n]{a} \,/\, \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a/b}$.

Örnek 5:

(1) $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3,$

(2) $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{2^3.2^2} = 2.\sqrt[3]{4}$,

(3) $\sqrt[3]{\dfrac{125}{27}} = \sqrt[3]{\dfrac{5^3}{3^3}} = \dfrac{5}{3}$,

(4) $\sqrt[4]{a^{21}.b^{18}.c^4} = \sqrt[4]{(a^5)^4.a.(b^4)^4.b^2.c^4} = a^5.b^4.c.\sqrt[4]{a.b^2}$,

(5) $(\sqrt[4]{a^3})^3 = \sqrt[4]{a^9} = \sqrt[4]{(a^2)^4.a} = a^2.\sqrt[4]{a}$,

(6) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[5]{3}}} = \sqrt[30]{3}$,

(7) $\sqrt[3]{4}.\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} = 2$,

(8) $\sqrt{4ab^3}.\sqrt[3]{2a^5b^7} = \sqrt[3.2]{(4ab^3)^3}.\sqrt[2.3]{(2a^5b^7)^2} = \sqrt[6]{2^8.a^{13}.b^{23}}$

$= 2a^2b^3\sqrt[6]{2^2ab^5}$.

2.3. MUTLAK DEĞER

Bu kısımda bir sayının mutlak değerini tanımlayacağız ve mutlak değere ait bazı özellikleri vereceğiz.

Tanım. Bir a reel sayısının sayı doğrusu üzerinde orijine uzaklığına a nın *mutlak değer*i denir ve $|a|$ ile gösterilir.

Uzaklık hiçbir zaman negatif olamayacağından mutlak değer de negatif olmayan bir sayıdır. Buradan $|-a| = |a|$ olduğu bulunur.

Örnek 1: $|3| = 3, |-4| = 4, |0| = 0, |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1, |1-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-1$ dir. Burada $\sqrt{2}-1 > 0$ ve $1-\sqrt{3} < 0$ olduğuna dikkat ediniz.

Yukarıdaki örneğe bakıldığında mutlak değer içindeki sayının pozitif veya sıfır olması durumunda mutlak değer dışına aynen çıktığını; negatif olması durumunda ise dışarıya işaret değiştirerek çıktığını görürüz. Bu durumu kısaca

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \ ise \\ -x & x < 0 \ ise \end{cases}$$

yazmak mümkündür.

Bu şekildeki bir yazılım, dikkat edilmediğinde hatalara sebep olabilir. Çünkü $x<0$ iken $|x| = -x$ yazmak mutlak değerin negatif bir sayıya eşit olabileceği izlenimini verebilir. Ancak bu, tanım gereği mümkün değildir. Dikkat edilmelidir ki $-x$ sayısı başında eksi (–) işareti olmasına rağmen negatif değildir. Çünkü x sayısı negatiftir ve ancak başına eksi işareti getirilince pozitif olabilmektedir.

Mutlak değer karekök yardımıyla da,

her x reel sayısı için $|x| = \sqrt{x^2}$

olarak tanımlanabilir. Mutlak değerin bu üç tanımı da birbirine denk olan ifadelerdir.

Örnek 2: $a > 0$, $b < 0$ ve $c < -1$ olduğuna göre

$$|a+1| - |b| + |c+1| - |-2-a| + |b+c|$$

ifadesini en sade şekline getirelim. $a > 0$, $b < 0$ ve $c < -1$ olduğundan

$a+1>0$, $b < 0$, $c+1 < 0$, $-2-a < 0$ ve $b+c < 0$

olur ve dolayısıyla $|a+1| = a+1$, $|b| = -b$, $|c+1| = -c-1$, $|-2-a| = 2+a$, $|b+c| = -b-c$ olup,

$$|a+1|-|b|+|c+1|-|-2-a|+|b+c| = a+1-(-b)+(-c-1)-(2+a)+(-b-c)$$
$$= a+1+b-c-1-2-a-b-c$$
$$= -2-2.c$$

sonucu bulunur.

Örnek 3: $1 < x < 2$ olduğuna göre $|x-1|-|x-2|+|2x-4|$ ifadesinin en sade şeklini belirleyelim.

x-1 > 0 ve $x - 2 < 0$ olduğundan $2x - 4 = 2(x - 2) < 0$ olur. Böylece

$$|x-1|-|x-2|+|2x-4| = x-1-(2-x)+(4-2.x)$$
$$= x-1-2+x+4-2.x$$
$$= 1$$

bulunur.

Teorem. $|a|+|b|=0$ ise $a = b = 0$ dır.

Örnek 4: $|2x-4|+|3y+6| = 0$ olduğuna göre $x + y$ değerini hesaplayalım.

Yukarıdaki teoreme göre $2x - 4 = 0$ ve $3y + 6 = 0$ olmalıdır. Buna göre $x = 2$ ve $y = -2$ olur ve böylece $x + y = 0$ bulunur.

Örnek 5: $|x+1|+|y|+|z-3| = -1$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Burada negatif olmayan üç sayının toplamının –1 olamayacağına dikkat etmemiz isteniyor. Bu sebeple bu eşitliği gerçekleyen hiçbir (x, y, z) üçlüsü mevcut değildir. Yani $Ç = \varnothing$ dir.

Örnek 6: $|x| = 4$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Mutlak değeri 4 olan sayılar 4 ve – 4 dür. O halde $|x| = 4$ denklemini sağlayan x değerleri 4 ve – 4 olur. Yani Ç = {– 4, 4} dür.

Örnek 7: $|2x-4| = 3$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Mutlak değeri 3 olan sayılar 3 ve –3 dür. O halde

$$2x - 4 = -3 \qquad \text{veya} \qquad 2x - 4 = 3$$

olmalıdır. Bu eşitliklerde her iki tarafa 4 ekledikten sonra 2 ile bölmek eşitliği bozmayacağından $x = 1/2$ ve $x = 7/2$ değerleri bulunur (bunlar birinci dereceden lineer denklemler konusunda ayrıntılı olarak ele alınacaklardır). Böylece $Ç = \{1/2, 7/2\}$ olur.

Örnek 8: $|3x + 2y - 5z + 17| = -23$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Hiçbir mutlak değer negatif bir sayıya eşit olamayacağından $Ç = \varnothing$ dir.

Örnek 9: $3|2x - 1| + 7 = 2$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Burada mutlak değerli ifade yalnız bırakıldığında $|2x - 1| = -5/3$ bulunur ki yine $Ç = \varnothing$ dir.

Örnek 10: $\big||x| - 4\big| = 2$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$\big||x| - 4\big| = 2$ olduğundan $|x| - 4 = -2$ veya $|x| - 4 = 2$ yazılabilir. Bu iki eşitlikte de ikişer durum söz konusudur:. Birinci eşitlik $|x| = 2$, ikinci eşitlik $|x| = 6$ biçimine gelir ki buradan $x = -2, x = 2, x = -6, x = 6$ çözümlerinin bulunacağı bellidir. Yani çözüm kümesi olarak $Ç = \{-6, -2, 2, 6\}$ elde edilir.

Şimdi mutlak değerle ilgili önemli bazı özellikler teoremler halinde verilecek ve bazılarının ispatları gösterilecektir.

Teorem.

(a) Her *a, b* reel sayı çifti için $|a.b| = |a|.|b|$ dir.

(b) Her *a, b (b≠0)* reel sayı çifti için $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ dir.

(c) *x* bir reel sayı ve *n* bir doğal sayı olmak üzere $|x^n| = |x|^n$ dir.

İspat. (a) ve (b) şıkları *a* ve *b* reel sayılarının pozitif ve negatif olma ihtimallerine göre ele alınarak ispatlanabilir. (c) şıkkı ise (a) şıkkının bir sonucudur.

Teorem. Her a reel sayısı için

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

dır.

İspat. 1) $a > 0$ ise, $|a| = a > 0$ ve $-|a| < 0$ olduğundan

$$-|a| < 0 < a = |a|$$

olur ve iddia doğrudur.

2) $a = 0$ ise $|a| = -|a| = 0$ olduğundan $0 \leq 0 \leq 0$ olur ve iddia yine doğrudur.

3) $a < 0$ ise $|a| = -a > 0$ ve $-|a| = a < 0$ olduğundan

$$-|a| = a \leq a \leq -a = |a|$$

olur ve iddia bir kez daha doğrudur.

Teorem (Üçgen Eşitsizliği). Her a , b reel sayı çifti için

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

dir. Eşitlik ancak a ve b zıt işaretli olmadığı zaman geçerlidir.

İspat. $\left.\begin{array}{l} -|a| \leq a \leq |a| \\ -|b| \leq b \leq |b| \end{array}\right\}$ eşitsizliklerini taraf tarafa toplarsak

$$-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$$

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

olur ve $|x| \leq a$ ise $-a \leq x \leq a$ olduğu hatırlanırsa

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

olur.

Teorem. Her *a, b* reel sayı çifti için

$$|a-b| \geq |a| - |b|$$

dir.

İspat. Ödev.

2.4. ARALIKLAR VE KOMŞULUKLAR.

Bu kısımda ilk olarak özel bazı sayı kümeleri olan aralıkları ele alacağız. Aralıklar matematiğin özellikle limit , süreklilik ve türev gibi en önemli alanlarında komşuluk adı ile karşımıza çıkarlar. Dolayısıyla ikinci olarak komşuluk kavramını inceleyeceğiz.

Tanım. *a* ve *b* reel sayılar ve $a < b$ olmak üzere

$$\{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x < b\}$$

kümesine *açık aralık* denilir ve (a,b) ile gösterilir. Benzer olarak

$$\{x \in \boldsymbol{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

kümesine *kapalı aralık* denilir ve $[a, b]$ ile gösterilir.

$$\{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x \leq b\} \ \ ve \ \{x \in \boldsymbol{R} \mid a \leq x < b\}$$

kümelerine ise sırasıyla *soldan açık* ve *sağdan açık aralık* denilir ve sırasıyla $(a, b]$ ve $[a, b)$ sembolleri ile gösterilir**.** $b - a$ sayısına da bu *aralıkların boyu* adı verilir.

Örnek 1: $(1, 2) = \{x \in \mathrm{R} \mid 1 < x < 2\}$,

$$[3, 6] = \{x \in R \mid 3 \le x \le 6\},$$

$$[1,7) = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 \le x < 7\},$$

$$(3, 5] = \{x \in \mathbf{R} \mid 3 < x \le 5\}.$$

(3, 5] aralığının boyu 5-3=2, [3,6] aralığının boyu 6-3=3 ve [1,7) aralığının boyu 7-1=6 dır.

Tanım. *a* herhangi bir reel sayı ve *r* pozitif bir reel sayı olmak üzere

$$(a\text{-}r, a+r) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid a\text{-}r < x < a+r\}$$

$$= \{ x \in \boldsymbol{R} \mid |x - a| < r \}$$

aralığına *a nın r komşuluğu* denilir ve *B*(*a*,*r*) ile gösterilir.

Örnek 2: 3 ün 1 komşuluğu B(3,1) = (3-1, 3+1) = (2, 4), *0* ın 2 komşuluğu B(0,2) = (0-2, 0+2) = (-2, 2) ve 100 ün 0.1 komşuluğu B(100, 0.1) = (100-0.1, 100+0.1) = (99.9, 100.1) şeklindedir.

Örnek 3: 15 in 4 komşuluğunda kaç tamsayı bulunur?

Çözüm. B(15,4) = (15-4, 15+4) = (11, 19) aralığında kalan tamsayılar 12, 13, 14, 15, 16, 17 ve 18 olup yedi tanedir.

2.5. SAYI SİSTEMLERİ VE TABAN ARİTMETİĞİ

Nasıl ki bir dilin bütün kelimeleri, harf adı verilen sonlu sayıdaki işaretlerin belli kurallara göre bir araya getirilmesiyle yazılır, sayılar da kelimelerine *rakam* adı verilen sonlu sayıda işaretlerin belli kurallara göre bir araya gelmesiyle yazılır. Buna doğal sayılarda *sayma sistemi* veya *yazma sistemi* denir. Böyle bir sistemde ilk önce *taban* adı verilen 1 den büyük belli bir *m* doğal sayısına ihtiyaç vardır. *m* tabanıyla birlikte sayma sistemine *m tabanına göre sayma sistemi* veya m-li sayı sistemi denir. *m* taban olarak alındığında sistemin *m* tane rakamı vardı. Bunlar 0,1,...,*m*-1 dir. On tabanına göre sayı sisteminin rakamları kümesi {0,1,...,9}dur. Demek ki kullanmakta olduğumuz sayı sistemi onluk sayı sistemidir. Buna göre 5 lik sayı sisteminin rakamları kümesi {0,1,2,3,4}, 2 lik sayı sisteminin rakamları

$\{0,1\}$ dir. Eğer $m \geq 10$ ise bu sayı sistemlerinde 10 ve 10 dan büyük rakamlar yerine İngiliz alfabesinin büyük harfleri kullanılır. Örneğin 16 lık sayı sisteminde ilk on basamaktan sonra 10 yerine A, 11 yerine B, 12 yerine C, 13 yerine D, 14 yerine E, 15 yerine F harfleri kullanılır. Buna göre 16 lık sayı sisteminin rakamları 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F dir.

Her hangi bir *m* tabanı verildiğinde *i*=0,1,2,...,n için a_i ler *m* tabanlı sayı sisteminin rakamlarından seçilmek üzere $(a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_0)_m$ biçimindeki bir gösterim *m* tabanına göre *n* + 1 basamaklı bir sayıyı belirtir. Bu sayının

$$(a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_0)_m = a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + ... + a_2 m^2 + a_1 m^1 + a_0 \qquad (1)$$

biçiminde bir tek çözümlemesi vardır. Eğer bir sayının tabanı belirtilmemişse o sayının 10 tabanında verildiği kabul edilir. 10 tabanı haricinde herhangi bir tabanda yazılan sayılar için taban mutlaka belirtilmelidir. Örneğin 5 basamaklı $(53028)_{10}$ sayısı taban belirtmeden 53028 biçiminde yazılır ve

$$53028 = 5 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8$$

biçiminde çözümlenir. Daha genel bir ifade ile *a,b,c,d* 10 luk sistemin rakamlarından alınmak üzere *abcd* biçimindeki dört basamaklı bir sayı

$$abcd = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$$

biçiminde çözümlenir. Benzer biçimde 16 tabanında verilen dört basamaklı $(3A7F)_{16}$ sayısı

$$(3A7F)_{16} = 3.16^3 + 10.16^2 + 7.16 + 15$$

biçiminde çözümlenir.

Her hangi bir tabanda verilen bir sayıyı 10 luk tabanda yazmak için (1) eşitliğinden faydalanılır. Dikkat edilirse (1) eşitliğinin sağ tarafı 10 luk sistemde bildiğimiz dört işlemden ibarettir. Yani (1) eşitliğinin sağ tarafı $(a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_0)_m$ sayısının 10 luk sistemdeki karşılığıdır. Şimdi bazı sayısal örnekler verelim.

Örnek 1: $(34021)_5$ sayısının 10 luk sistemdeki karşılığını bulalım.

(1) eşitliğinden

$$(34021)_5 = 3.5^4 + 4.5^3 + 0.5^2 + 2.5 + 1 = (2386)_{10} = 2386$$

bulunur.

m tabanına göre bir ondalıklı sayı verilmişse, yani sayının içinde virgül varsa, sayının çözümlemesi yapılırken virgülden sonraki rakamlar sırasıyla $m^{-1}, m^{-2}, m^{-3}, ...$ ile çarpılıp toplanır. Aşağıdaki örneği inceleyiniz:

Örnek 2: $(1011,101)_2$ sayısının 10 luk sistemdeki karşılığını bulalım.

$$(1011,101)_2 = 1.2^3 + 1.2 + 1 + 1.2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1.2^{-3} = (11,625)_{10}$$

Bazen taban ile ilgili sorular da sorulabilir. Aşağıda böyle bir örnek verilmektedir:

Örnek 3: $(12)_m + (25)_{m+1} = (33)_8$ eşitliğini sağlayan m değerini bulalım.

Çözümleme yapılırsa

$$(12)_m + (25)_{m+1} = (33)_8$$
$$1.m + 2 + 2.(m+1) + 5 = 3.8 + 3$$
$$3m + 9 = 27 \Rightarrow m = 6$$

bulunur.

Buraya kadar herhangi bir tabanda verilen bir sayının 10 luk tabana nasıl çevrileceğini gördük. Şimdi 10 luk tabanda verilen bir sayının başka bir tabana göre nasıl yazılabileceği üzerinde duralım. Eğer 10 luk tabanda verilen her hangi bir sayı m tabanında yazılmak isteniyorsa verilen sayı m ye bölünür, elde edilen bölüm m den büyükse tekrar m ye bölünür bu işleme m den küçük bir bölüm elde edilinceye kadar devam edilir. En son bölümden başlayarak kalanların ardışık olarak yazılmasıyla sayının m tabanındaki karşılığı bulunur. Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz:

Örnek 4: 49 sayısını 3 lü sayı sisteminde ve 144 sayısını 5 li sayı sisteminde yazalım.

$$\begin{array}{r|l} 49 & 3 \\ \hline -1 & 16 \\ \hline & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 16 & 3 \\ \hline -5 & 5 \\ \hline & -2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \hline -3 & 1 \end{array}$$

Buna göre $49 = (1211)_3$ dir.

$$\begin{array}{r|l} 144 & 5 \\ \hline -4 & 28 \\ \hline & -3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 28 & 5 \\ \hline -5 & 5 \\ \hline & -0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ \hline -5 & 1 \end{array}$$

O halde $144 = (1034)_5$ dir.

Onluk sistem ile herhangi bir sayı sistemi arasındaki geçişi verdik. Şimdi herhangi bir sayı sisteminden başka bir sayı sistemine geçişin nasıl olacağını verelim. Basit bir muhakeme ile m tabanında verilen bir sayı önce 10 luk tabana 10 luk tabanda elde edilen sayı n tabanına çevrilmekle m tabanında verilen bir sayı n tabanına çevrilmiş olur.

Örnek 5: $(1100111)_2$ sayısını 8 ve 16 tabanlarında yazalım.

$$\begin{aligned}(1100111)_2 &= 1.2^6 + 1.2^5 + 1.2^2 + 1.2 + 1 \\ &= 64 + 32 + 4 + 2 + 1 = (103)_{10} = 103\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} 103 & 8 \\ \hline -7 & 12 \\ \hline & -4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 8 \\ \hline & 1 \end{array}$$

O halde $(1100111)_2 = 103 = (147)_8$

ve

$$\begin{array}{r|l} 103 & 16 \\ \hline -7 & 6 \end{array}$$

O halde $(1100111)_2 = (67)_{16}$

olur.

Ondalıklı sayılarda her hangi bir tabandan 10 luk tabana çevirmenin çözümlemeyle nasıl yapılacağı daha önce verilmişti. 10 luk tabanda verilen ondalık bir sayıyı başka bir tabanda yazmak için ondalıklı sayının tam kısmı bilinen şekilde çevrilerek tam kısım olarak yazılır. Ondalıklı kısım hangi tabana çevrilmek isteniyorsa o sayı ile çarpılır. Çarpımın ondalıklı kısmı tekrar aynı sayı ile çarpılır. Bu işleme ondalıklı kısım 0 oluncaya kadar devam edilir. Sonunda çarpımların tam kısımları sırayla alınarak istenilen tabanda sayı yazılmış olur. Bu durum aşağıdaki örneklerde açıkça gösterilmiştir.

Örnek 6: $(0{,}375)_{10}$ sayısını, yani 10 luk sistemde indis yazmaya gerek olmadığından 0,375 sayısını, ikili sistemde yazalım. Bu örnekte tam kısım sıfır olduğundan tam kısımla yapılacak işlem yoktur. Ondalık kısım tam olasıya kadar ardışık olarak 2 ile çarpılır ve

0,375.2 = 0,750 sayısının tam kısmı olan 0,
0,750.2 = 1,5 sayısının tam kısmı olan 1,
0,5.2 = 1,0 sayısının tam kısmı olan 1

rakamları yan yana yazılarak ikili sistemdeki sayının virgülden sonraki kısmı bulunmuş olur. Yani $(0{,}375)_{10} = (0{,}011)_2$ dir.

Örnek 7: $(91{,}8432)_{10}$ sayısını beşlik sistemde yazalım.

Önce sayının tam kısmı, yani 91 sayısı ardışık 5 ile bölme yardımıyla beşlik sistemde yazılır.

```
 91 | 5
 -  |----
    | 18 | 5
    |----|----
  1 |  -   3
    |----
       3
```

$91 = (331)_5$

Sonra, sayının ondalık kısmı olan 0,8432 sayısı ardışık 5 ile çarpma yardımıyla 5 lik sistemde yazılır.

0,8432.5 = 4,216
0,216.5 = 1,08
0,08.5 = 0,4

$$0,4.5 = 2,0$$

olur. Sonuç olarak,

$$(23,8432)_{10} = 23,8432 = (43,4102)_5$$

olduğu bulunur

Bazen istenen sistemde karşılık bulunacak ondalıklı sayı sonsuz devirli olarak da bulunabilir. Aşağıda bu duruma basit bir örnek veriyoruz:.

Örnek 8: $(0,5)_{10} = (?)_5$

$$0,5.5=2,5$$
$$0,5.5=2,5$$
$$0,5.5=2,5$$
$$\vdots$$

olur. Dikkat edilirse çarpımların ondalık kısmı hiçbir zaman 0 olmayıp 5 tekrar etmektedir. Bu durumda çarpımın tam kısmı tekrar edeceğinden verilen sayının istenilen tabanda ondalıklı kısmı devirlidir. Buna göre $(0,5)_{10} = (0,\overline{2})_5$ dir.

Son olarak 16 lık sistemde ondalıklı olarak verilen bir sayının 10 luk sistemdeki karşılığını bulmaya yönelik bir örnek vereceğiz.

Örnek 9: $(2B7F,C4)_{16} = (?)_8$

$$(2B7F,C4)_{16} = 2.16^3 + 11.16^2 + 7.16 + 15 + 12.16^{-1} + 4.16^{-2}$$
$$= (11135,765625)_{10}$$

olur. Önce ondalıklı kısmın 8 lik sistemdeki karşılığını bulalım.

$$0,765625.8 = 6,125$$
$$0,125.8 = 1,0$$

olduğundan 8 lik sistemde karşılık gelen sayının ondalıklı kısmı 61 dir. Şimdi de sayının tam kısmını bulalım:

$$
\begin{array}{r|l}
11135 & 8 \\ \cline{2-2}
= & 1391 \quad \vert\ 8 \\ \cline{3-3}
7 & = \quad 173 \quad \vert\ 8 \\ \cline{4-4}
 & \quad 7 \quad = \quad 21 \quad \vert\ 8 \\ \cline{5-5}
 & \qquad 5 \quad = \quad 2 \\
 & \qquad\quad 5
\end{array}
$$

olduğundan

$$(2B7F,C4)_{16} = (25577,61)_8$$

sonucu elde edilir.

2.5.1 Sayı Sistemlerinde Dört İşlem

Herhangi bir sistemde yapılmak istenen dört işlemin mantığı, onluk sistemde yürütülen mantıkla aynıdır. Şöyle ki, onluk sistemde onun bir katı olan sayılarda elde bir, iki katı olan sayılarda elde iki ... oluyordu. *m* li sistemde de *m* nin bir katı olan yerde elde bir, iki katı olan yerde elde iki ... olur. Diğer özellikler de benzer olarak uygulanır. Şimdi sıra ile dört işlemle ilgili örnekler verelim.

Örnek 1:

$$
\begin{array}{r}
(3412)_5 \\
(4430)_5 \\
+\ (1234)_5 \\ \hline
(20131)_5
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
(3731)_8 \\
-\ (2657)_8 \\ \hline
(1052)_8
\end{array}
$$

Bu örnekteki toplama işlemi ile ilgili ayrıntılı bir açıklama vereceğiz. Örnekte verilen çıkarma işlemi için bir açıklama vermemekle beraber çıkarma da toplama işleminde yapılanlara benzer düşüncelerle yapılacağından okuyucu çıkarmanın nasıl yapıldığını kolayca anlayacaktır. Örnekte verlen 5 lik sistemdeki üç sayının toplamını bulmak için önce bu sayıların ilk haneleri olan 2+0+4=6 toplamı yapılır ve bu toplam 5 lik sistemde 1 olarak yazılır. 6 sayısı 5 e bölündüğünde 1 tam var olduğu için “elde var 1” diye düşünülür. Eldeki 1 sayısı ikinci hanede bulunan rakamların toplamına eklenir. Yani 1+3+3=7 olup eldeki 1 ile beraber 8 bulunur. 8 sayısı 5 lik sistemde

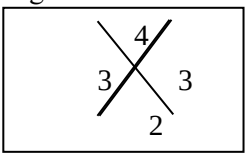
3 olup 8 de 5 yine 1 defa var olduğundan elde 1 olur. Üçüncü hanedeki rakamların toplamı 4+4+2=10 olup eldeki 1 ile beraber 11 dir. 11 sayısı 5 lik sistemde 1 dir ve 11 de 5 iki defa var olduğundan "elde 2" olur. Dördüncü hanedeki rakamların toplamı 3+4+1=8 olup eldeki 2 ile beraber 10 bulunur. 10 sayısı 5 lik sistemde sıfır olup 10 da 5 iki defa var olduğundan "elde 2" olur. Sayıların beşinci hanesinde rakamlar olmadığından eldeki 2 rakamı toplamın en başına bir rakam olarak yazılır.

Çarpma ve bölme işlemleri de10 luk sistemdeki kurallara benzer biçimde yapılır. Yukarıdaki örnekte toplama için verilen açıklamayı yapmaya gerek duymadan çarpma ve toplama için birer örnek vereceğiz.

Örnek 2.

$$\begin{array}{r} (4532)_6 \\ \times \quad (354)_6 \\ \hline (31412)_6 \\ (40344)_6 \\ +\ (22440)_6 \\ \hline (3123252)_6 \end{array}$$

Sağlama:



Sağlama: 10 luk sistemde çarpılan, çarpan ve sonucu 9 a bölüp kalanlarla işlem yapılırdı. Burada da 5 e bölüp kalanlarla işlem yapılacaktır. Bunun için de rakamlar toplamı 5 e bölünerek işlem yapılacaktır.

Örnek 3:

$$\begin{array}{r|l} (3221)_4 & (21)_4 \\ \hline -\ (21)_4 & (121)_4 \\ \hline (112)_4 & \\ -\ (102)_4 & \\ \hline (0101)_4 & \\ -\ (21)_4 & \\ \hline (20)_4 & \end{array}$$

Sağlama : $(121)_4$

$$\begin{array}{r} (121)_4 \\ \times \quad (21)_4 \\ \hline (121)_4 \\ +\ (302)_4 \\ \hline (3201)_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (3201)_4 \\ +\ (20)_4 \\ \hline (3221)_4 \end{array}$$

2.6. DOĞAL SAYILARDA BÖLÜNEBİLME KURALLARI

Bu kısımda onluk sayı sisteminde 1 den büyük doğal sayıların bazı doğal sayılarla tam bölünebilmesi için gerek ve yeter şart olan kuralları bir liste halinde, birer örnekle birlikte vereceğiz.

$a \in \mathbb{N}$ herhangi bir doğal sayı olsun. a bazı rakamların yanyana konulması ile elde edilmiştir. Örneğin $a = 2005$ ise a sayısı 2,0,0 ve 5 rakamlarının yanyana konması ile oluşmuştur (Onluk sayı sisteminde sadece 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 un rakam olarak adlandırıldığını hatırlayınız.).

Kural 1. (2 veya 5 ile bölünebilme): a nın 2 (veya 5) ile bölümünden kalan a nın son rakamının 2 (veya5) ile bölümünden kalana eşittir. Dolayısıyla a nın 2 (veya 5) ile bölünebilmesi için gerek ve yeter şart a nın son rakamının sıfır olması veya 2 veya 5 ile bölünebilmesidir.

Örnek 1. 12345 sayısının son rakamı 5 olup 2 ile bölünemediğinden 12345 sayısı 2 ile bölünemez. 5 sayısı 5 ile bölünebildiğinden 12345 sayısı 5 ile bölünebilir ve $12345 = 5 \cdot 2469$ dur.

2085636 sayısının son rakamı 6 olup 2 ile bölünür. Dolayısıyla 2085636 sayısı da 2 ye bölünür ve $2085636 = 2 \cdot 1042818$ dir. Fakat 6 rakamı 5 ile bölünmediğinden 2085636 sayısı 5 ile bölünemez.

Kural 2. (3 veya 9 ile bölünebilme): a nın 3 (veya 9) ile bölümünden kalan a nın rakamları toplamının 3 (veya 9) ile bölümünden elde edilen kalana eşittir. Dolayısıyla a nın 3 (veya 9) ile bölünebilmesi için gerek ve yeter şart a nın rakamları toplamının 3 (veya 9) ile bölünebilmesidir.

Örnek 2. 120345 sayısının rakamları toplamı $1+2+0+3+4+5=15$ olup 15 in 3 veya 9 ile bölünebilmesi $1+5=6$ nın 3 veya 9 ile bölünebilmesine karşılık gelir. 6 sayısı 3 e bölünür fakat 9 a bölünemez. O halde 120345 sayısı 3 ile bölünür fakat 9 ile bölünemez.

Not: 9 a bölünebilen sayıların 3 e de bölünebileceği aşikârdır. (Çünkü 9 sayısı 3 e bölünür.)

Kural 3.(7 ile bölünebilme): a nın 7 ile bölümünden kalanı iki aşamada formüle edeceğiz.

I.HÂL: a üç rakamdan oluşan bir sayı ise $a = a_3a_2a_1$ formundadır. Bu durumda a nın 7 ile bölümünden kalan $2a_3 + 3a_2 + a_1$ sayısının 7 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir. Dolayısıyla a nın 7 ile bölünebilmesi için gerek ve yeter şart $2a_3 + 3a_2 + a_1$ sayısının 7 ile bölünebilmesidir.

II.HÂL: $n > 3$ olmak üzere

$$a = a_n a_{n-1} \ldots a_9 \underset{c_2}{a_8 a_7} \underbrace{a_6 a_5 a_4}_{c_1} \underset{c_0}{a_3 a_2 a_1}$$

biçiminde sağdan itibaren üçerli gruplara ayrılarak üçer rakamdan oluşan c_i sayıları gözönüne alınsın. Bu durumda $d_0 = c_0 + c_2 + c_4 + \ldots$ ve $d_1 = c_1 + c_3 + c_5 + \ldots$ olmak üzere a nın 7 ile bölümünden kalan $|d_0 - d_1|$ in 7 ile bölümünden kalana eşittir. Dolayısıyla a nın 7 ile bölünebilmesi için gerek ve yeter şart $|d_0 - d_1|$ sayısının 7 ile bölünebilmesidir.

Örnek 3. 345 sayısı için $2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 5 = 23$ olup 23 sayısı 7 ye bölünmediğinden 345 sayısı da bölünmez.

Örnek 4. 476 sayısı için $2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + 6 = 35$ olup 35 sayısı 7 ye bölünür, çünkü $35 = 7 \cdot 5$ dir. O halde 476 sayısı da 7 ye bölünür. Gerçekten $476 = 7 \cdot 68$ dir.

Örnek 5. 1437821 sayısı üçerli üçerli gruplandığında $c_0 = 821$, $c_1 = 437$ ve $c_2 = 1 = 001$ olur ve bu nedenle $d_0 = c_0 + c_2 = 821 + 1 = 822$ ve $d_1 = c_1 = 437$ olup $|d_0 - d_1| = |822 - 437| = 385$ olduğu bulunur. O halde 1437821 sayısının 7 ile bölünebilmesi için gerek ve yeter şart 385 sayısının 7 ile bölünebilmesidir. $2 \cdot 3 + 3 \cdot 8 + 5 = 35$ olup 35 sayısı 7 ye bölündüğünden 385 sayısı ve dolayısıyla 1437821 sayısı 7 ye bölünür. Gerçekten de $1437821 = 7 \cdot 205403$ olur.

Kural 4. (11 ile bölünebilme): a nın nın i. basamağındaki rakamı a_i ile gösterelim. Bu durumda a sayısı n rakamlı bir sayı ise $a = a_n a_{n-1} \ldots a_4 a_3 a_2 a_1$ ile gösterilecektir. a nın 11 ile bölümünden kalan, a nın çift indisli rakamlarının toplamı ile tek indisli rakamlarının toplamının arasındaki mutlak farkın

11 ile bölümünden kalanına eşittir. Burada a nın çift indisli rakamlarının toplamı $ç = a_2 + a_4 + a_6 + \ldots$, tek indisli rakamlarının toplamı $t = a_1 + a_3 + a_5 + \ldots$ dir. Dolayısıyla a nın 11 ile bölünebilmesi için gerek ve yeter şart a nın çift indisli rakamlarının toplamı olan *ç* ile tek indisli rakamlarının toplamı olan *t* arasındaki mutlak farkın (yani $|ç - t|$ nin) 11 ile bölünebilmesidir.

Örnek 6. 882678522 sayısının 11 ile bölünüp bölünemeyeceğini araştıralım.

$ç = 2+8+6+8 = 24$ ve $t = 2+5+7+2+8 = 24$ olup $|ç - t| = |24 - 24| = 0$ olur ve sıfır her doğal sayıya bölünebildiğinden 11 e de bölünür. Sonuç olarak 882678522 sayısının 11 e bölündüğü elde edilir. Gerçekten de $882678522 = 11 \cdot 80243502$ dir.

Örnek 7. 70241 sayısının 11 e bölünüp bölünemeyeceğini araştıralım.

$ç = 4+0 = 4$ ve $t = 1+2+7 = 10$ olup $|ç - t| = |4 - 10| = 6$ sonucu bulunur. 6 sayısı 11 e bölünemediğinden 70241 sayısı da 11 e bölünemez.

Kural 5. (10^n ile bölünebilme): a nın 10^n ile bölümünden kalan a nın sondan n rakamının oluşturduğu sayıdır. Dolayısıyla a nın 10^n ile bölünebilmesi için gerek ve yeter şart a nın son n rakamının tümünün sıfır olmasıdır.

Örnek 8. 7402235 sayısının 10 ile bölümünden kalan 5, 10^2=100 ile bölümünden kalan 35, 10^3=1000 ile bölümünden kalan 235, 10^4=10000 ile bölümünden kalan 2235, 10^5=100000 ile bölümünde kalan 2235 olur. Bu sayı 10 ile, 10^2 ile, 10^3 ile, 10^4 ile, 10^5 ile bölünemez.

Örnek 9. 3703400 sayısı, son rakamı 0 olduğundan 10 ile bölünebilir, son iki rakamı 0 olduğundan 100 e de bölünür fakat 1000 e bölünemez. Çünkü son üç rakamının tümü 0 değildir.

Kural 6. (4 ile bölünebilme): a nın 4 ile bölümünden kalan a nın son iki rakamının oluşturduğu sayının 4 ile bölümünden kalana eşittir. Dolayısıyla a nın 4 ile bölünebilmesi için gerek ve yeter şart a nın son iki rakamının oluşturduğu sayının 4 ile bölünebilmesidir. (Daha pratik bir ifadeyle, “4 ile

bölünebilme iki defa 2 ile bölünebilme anlamına geldiğinden $a/2$ çift olduğunda a sayısı 4 ile bölünür" biçiminde de kullanmak mümkündür.)

Örnek 10. 19068 sayısının 4 e bölünüp bölünemeyeceğini araştıralım.

19068 sayısının son iki rakamından oluşan sayı 68 dir. 68 sayısı için $68 = 4 \cdot 17$ olduğundan 68, 4 e bölünür. O halde 19068 sayısı da 4 e bölünür. Gerçekten de $19068 = 4 \cdot 4767$ dir.

Örnek11. 872590 sayısının 4 e bölünüp bölünemediğini inceleyelim.

872590 sayısının son iki rakamının oluşturduğu sayı 90 dır. 90 sayısı ikiye bölünür ve 45 bulunur ama 45 bir kere daha ikiye bölünmez. Dolayısıyla 90 sayısı 45 e bölünmez. Bu ise 872590 sayısının 4 e bölünemediğini gösterir.

Kural 7. (25 ile bölünebilme): a nın 25 ile bölümünden kalan a nın son iki rakamının oluşturduğu sayının 25 ile bölümünden kalana eşittir. Dolayısıyla a nın 25 ile bölünebilmesi için gerek ve yeter şart a nın son iki rakamının sıfır olması veya a nın son iki rakamının oluşturduğu sayının 25 ile bölünebilmesidir. (Daha pratik bir ifadeyle, son iki rakamı 00 veya 25 veya 50 veya 75 ise a sayısı 25 ile bölünür.)

Örnek 12. 30000111125 sayısının son iki rakamının oluşturduğu sayı 25 olduğunda 30000111125 sayısı 25 e bölünür. Gerçekten $30000111125=25 \cdot 1200004445$ dir.

Örnek 13. 45454500 sayısının son iki rakamı sıfır olduğundan 45454500 sayısı 25 ile bölünür ve $45454500 = 25 \cdot 1818180$ dır.

Örnek 14. 45454545 sayısının son iki rakamı 45 olduğundan 45454545 sayısı 25 e bölünemez.

Kural 8. (8 ile bölünebilme): a nın 8 ile bölümünden kalan a nın son üç rakamının oluşturduğu sayının 8 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir. Dolayısıyla a nın 8 ile bölünebilmesi için gerek ve yeter şart a nın son üç rakamının sıfır olması veya son üç rakamından oluşan sayının 8 ile bölünebilmesidir ($8 = 2^3$ olduğundan a nın 8 ile bölünebilmesi ardışık olarak üç defa 2 ile bölünebilmesi anlamına gelir.).

Örnek 15. 2712252 sayısının 8 e bölünüp bölünemeyeceğini araştıralım.

Verilen sayının son üç rakamının oluşturduğu sayı 252 dir. 252 sayısı 8 e bölünebiliyorsa verilen sayı da bölünebilecek, bölünemiyorsa verilen sayı da bölünemeyecektir. 250 sayısı 2 ye bölünür ve 125 elde edilir, fakat 125 sayısı bir daha 2 ye bölünemez. Dolayısıyla 2712252 sayısı 8 e bölünemez.

Örnek 16. 141240 sayısının son üç rakamının oluşturduğu sayı 240 olup 240 sayısı üç defa 2 ye yani 8 e bölünür. (240/2=120, 120/2=60 ve 60/2=30 dur.). O halde 141240 sayısı 8 e bölünür.

Kural 9. (125 ile bölünebilme): a nın 125 ile bölümünden kalan a nın son üç rakamının oluşturduğu sayının 125 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir. Dolayısıyla a nın 125 ile bölünebilmesi için gerek ve yeter şart a nın son üç rakamının sıfır olması veya son üç rakamından oluşan sayının 125 ile bölünebilmesidir ($125 = 5^3$ olduğundan a nın 125 ile bölünebilmesi ardışık olarak üç defa 5 ile bölünebilmesi anlamına gelir.).

Örnek 17. 50375 sayısının 125 ile bölünüp bölünemeyeceğini araştıralım.

50375 sayısının son üç rakamının oluşturduğu sayı 375 olup $375 = 3 \cdot 125$ olduğundan 50375 sayısı 125 e bölünür.

Örnek 18. 208650 sayısının son üç rakamının oluşturduğu sayı 650 dir. 650 sayısı 125 e bölünemez (650 iki defa 5 e bölünür fakat üçüncü defa bölünemez.). O halde 208650 sayısı 125 e bölünemez.

ALIŞTIRMALAR

1. 4 ile bölündüğünde 1 kalanını veren sonsuz çoklukta asal sayı olduğunu ispatlayınız. (*)

2. 4 ile bölündüğünde 3 kalanını veren sonsuz çoklukta asal sayı olduğunu ispatlayınız. (*)

3. 4 ile bölündüğünde 2 kalanını veren kaç tane asal sayı vardır? (*)

4. 4 ile tam bölünebilen kaç tane asal sayı vardır? (*)

5. a ile b aralarında asal iseler a ile $a+b$ de aralarında asaldır, gösteriniz.(*)

6. 4 ile bölündüğünde 1 kalanını veren bir sayının tek mi çift mi olduğunu belirleyiniz. Bu sayının karesinin de 4 ile bölününce 1 kalanını veren bir sayı olacağını ispatlayınız. (*)

7. 4 ile bölündüğünde 3 kalanını veren bir sayının karesinin 4 ile bölündüğünde kaç kalanını vereceğini belirleyiniz. (*)

8. Aşağıdaki rasyonel sayıların ondalık açılımlarını yapınız. Devredenleri devirli sayı olarak ifade ediniz.

2/7, 3/5, 1/17, 25/7, 66/4, 21/13, 22/7, 55/9, 33/31, 90/29, 18/65.

9. Aşağıdaki devirli sayıları rasyonel sayı haline dönüştürünüz.

$2.11\overline{23}$, $3.67\overline{124}$, $0.\overline{178}$, $1.9\overline{2}$, $2.545\overline{3}$, $7.\overline{7}$, $0.\overline{4}$, $0.\overline{9}$, $1.\overline{9}$, $21.21\overline{369}$.

10. $\sqrt{3}$ sayısının rasyonel olmadığını ispatlayınız.

11. Reel sayı ekseninde rasyonel ve irrasyonel sayılar dışında başka sayılar var mıdır?

12. İki irrasyonel sayının toplamının ve farkının rasyonel olabileceğine beşer örnek veriniz.

13. İki irrasyonel sayının çarpımı tamsayı olabilir mi? Örnek veriniz.

14. İki rasyonel sayının çarpımı veya bölümü bir irrasyonel sayı olabilir mi? Örnek veriniz.

15. a 17 ile aralarında asal bir tamsayı olmak üzere $a/17$ rasyonel sayısının devirli bir sayı olduğunu gösteriniz ve devreden kısmının kaç basamaklı olduğunu a ya çeşitli değerler vererek belirleyiniz.

16. a bir tamsayı olmak üzere $a/15$ rasyonel sayısının devirli bir sayı olup olmadığını belirleyiniz. Devirli ise devreden kısmın basamak sayısını belirleyiniz.

17. 0.5 ile 0.6 arasında 10 tane rasyonel sayı bulunuz.

18. Aşağıdaki sayılardan hangilerinin cebirsel sayı olduklarını belirleyiniz.

8, 3.5, 0.2, 8.8, $3.\overline{43}$, $8.91\overline{7}$, 4/7, $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}+1$, $\sqrt{3}-3$, $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $\sqrt{1+\sqrt{2}}$, $\sqrt[3]{1+2\sqrt{1-\sqrt{3}}}$, e^2, e+1, $e+\frac{1}{2}$, $e-\pi$, π^5, 2^7, -2^8, $(-8)^3$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

19. Bir cebirsel sayıyı kök kabul eden rasyonel katsayılı bir polinomun varlığını tanımdan biliyoruz. Acaba bu polinom tek midir? 17. Sorudaki sayılardan cebirsel olan üç tane seçerek bu sayıları kök kabul eden çeşitli derecelerden rasyonel katsayılı polinomlar bulunuz. **(*)**

20. 17. Sorudaki sayılardan cebirsel olanlarına karşılık gelen en düşük dereceli polinomları belirleyiniz.

21. Cebirsel sayılar hem rasyonel hem de irrasyonel olabildiklerine göre acaba reel sayı eksenini doldururlar mı? Eğer cevabınız hayır ise hangi sayıların eksik kalacağını belirleyiniz. **(*)**

22. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını belirleyiniz.

(a) $1+\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}-2\right)^{-1}}{2}$ **(b)** $2^{-2}-3^{-2}+4^{-2}$ **(c)** $1-\frac{2}{3}.4+2-\frac{1}{5}.\frac{2}{3}+1$

(d) $\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)^{-2}+\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^{-2}$ **(e)** $1+\dfrac{3}{2-\dfrac{5}{4+\dfrac{2}{1+\dfrac{3}{2+x}}}}=4$ ise $x=?$

23. a aşağıda verilen aralıkta değerler alırken a^2 hangi aralıkta değerler alır?

(a) $2<a<5$, **(b)** $-3<a<5$, **(c)** $-2<a<0$

24. x bir reel sayı olmak üzere $f(x) = |3x-6|$ fonksiyonunun minimum değerini bulunuz.

25. x bir reel sayı olmak üzere $f(x) = |x^4+1|$ fonksiyonunun minimum değerini bulunuz.

26. $|3x+2| = 11$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

27. $|2x+1| + 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

28. $|x-1| + |y-2| = 0$ olduğuna göre $x.y$ nedir?

29. $\sqrt{x-2}+\sqrt{y-3} = 0$ olduğuna göre $x + y$ nedir?

30. $\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{y+5} = 0$ olduğuna göre $x+y$ nedir?

31. Her bir x reel sayısı için $|x| = |-x|$ olduğunu gösteriniz.

32. $x < 0$ ise $\dfrac{|2x|+|-x|-|-3x|}{4x-|x|}$ ifadesinin en sade şeklini belirleyiniz.

33. $1 < x < 5$ olduğuna göre $|1-x|+|2x-10|-|-3x|-|1+x|$ ifadesinin en sade şeklini belirleyiniz.

34. $\dfrac{2^{11}+2^{12}-2^{14}}{4^5+2^{11}-2^{13}}$ sayısının en sade şeklini belirleyiniz.

35. a, b, c pozitif tamsayılar olmak üzere $2^{a-b} = 3^{b-2c}$ olduğuna göre $a+b+c$ toplamının alabileceği en küçük değer nedir?

36. $(0.012)^2 . (0.04)^3 .(0.6)^4 = 2^a . 3^b . 10^c$ ise $a+b+c$ nedir?

37. $x < 2$ ise $\sqrt{(2-x)^2}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

38. $x < 0 < y$ ise $\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}+\sqrt{(x-y)^2}$ ifadesinin değerini bulunuz.

39. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını belirleyiniz.

(a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$ **(c)** $\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

40. $\dfrac{(-2)^3+\sqrt{(-4)^2}-\sqrt{4}^2+2\sqrt{(-2)^4}}{1-\frac{1}{2}\sqrt{(-16)^2}-\sqrt{(-9)^2}}$ ifadesini hesaplayınız.

41. m bir taban olmak üzere

$$(34)_m + (23)_{m+1} = (124)_{m-1}$$

eşitliğini sağlayan m değerini bulunuz.

42. $(221)_3 + (211)_3 + (111)_3$ toplamını 3 tabanında hesaplayınız.

43. $(217)_8 = (a6b)_7$ ise $a + b$ toplamını hesaplayınız.

44. 5 tabanında 4 basamaklı rakamları farklı en büyük sayı ile en küçük sayının farkını bulunuz.

45. 64 sayısının hangi tabandaki karşılığı 144 olduğunu bulunuz.

46. $[(23)_3]^2$ sayısını 3 tabanında ifade ediniz.

47. $x = (24)_b$, $y = (554)_b$ ve $y = x^2$ ise b sayısını bulunuz.

48. $(13,\overline{2})_4$ sayısını 5 tabanında yaklaşık olarak yazınız.

49. $(101)_2 < A < (101)_3$ eşitsizliğini sağlayan kaç doğal sayı vardır.

50. $(abcde)_5$ beş basamaklı sayısında a nın değeri 1 arttırılır, b nin değeri 2 azaltılır, c nin değeri 3 azaltılır ve d nin değeri 2 arttırılırsa sayı 5 tabanında ne kadar değişir.

51. 16 lık sistemde en büyük 3 basamaklı sayı 10 luk sistemde hangi sayıya eşittir.

52. $(ab)_8 + (ba)_7 = (1ab)_5$ olduğuna göre $a+b$ toplamının değerini bulunuz.

53. $(40m)_5$ sayısının , $(1100101)_2$ sayısına eşit olması için m ne olmalıdır. Bulunuz.

54. Taban aritmetiğini kullanarak

$$(a^2 - a + 1).(a^2 + a + 1) = (a^4 + a^2 + 1)$$

olduğunu gösteriniz. Bundan faydalanarak her $m \in N^+$ için $(10101)_m$ sayısının $(111)_m$ sayısı tarafından tam olarak bölünebileceğini gösteriniz ve bölümü m tabanında bulunuz.

55. $m > 2$ için $(121)_m$ sayısının bir tam kare olduğunu gösteriniz.

56. 3 tabanına göre beş basamaklı bir sayı 5 tabanına göre en çok kaç basamaklı olduğunu bulunuz.

57. Aşağıdaki sayıları istenen tabanda yazınız.

a) $(109AB)_{12}=(\ ?\ )_{16}$ b) $(678)_9=(\ ?\ )_3$

c) $(52,325)_6=(\ ?\ )_5$ d) $(2342)_5=(\ ?\ )_6$

58. Aşağıdaki işlemleri istenilen tabanlara göre yapınız.

a) $(412)_5 . (214)_5 = (\ ?\ )_5$ b) $(4043)_5 : (21)_5 = (\ ?\ )_5$

c) $(12323)_4 : (21)_5 = (\ ?\ )_4$ d) $(231)_4+(324)_5 - (543)_6 = (\ ?\ )_4$

59. 6431623 sayısının 11 ile, 3 ile ve 9 ile bölünüp bölünemeyeceğini ayrı ayrı inceleyiniz.

60. 58670000 sayısının 7, 8, 11, 10 ve 10 un ikinci üçüncü dördüncü ve beşinci kuvvetlerine bölünüp bölünmeyeceğini araştırınız.

3. BÖLÜM

FONKSİYONLAR

HEDEFLER

1. A ve B kümelerinin kartezyen çarpımlarının herhangi bir altkümesinin A dan B ye bir bağıntı olduğunu bilme, bununla ilgili sonlu ve sonsuz kümeler üzerine uygulama yapabilme.
2. Fonksiyon ve bağıntı arasındaki farkı anlayabilme.
3. Verilen herhangi bir fonksiyonun birebirliğini ve örtenliğini anlayabilme.
4. Fonksiyonların tanım ve değer kümelerini bulabilme.
5. Fonksiyonlarla ilgili toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve sayı ile çarpma işlemlerini yapabilme.
6. Verilen bir fonksiyonun tersinin varlığını ve yokluğunu anlayabilme ve varsa tersini bulabilme.
7. Bileşke fonksiyonun hangi şartlarda tanımlı olduğunu anlayabilme, ve varsa bileşke fonksiyonu bulabilme.
8. Cebirsel fonksiyonu kavrayabilme.
9. Parçalı fonksiyonları yazabilme.

DAVRANIŞLAR:

1. Sıralı ikili kavramını bilir ve verilen kümelerin kartezyen çarpımını bulur.
2. Bağıntı ve fonksiyon arasındaki farkı bilir ve bunları birbirinden ayırt eder . Sonlu kümeler arasında fonksiyon ve fonksiyon olmayan bağıntı örnekleri verebilir.
3. A ve B sonlu kümeleri için A dan B ye bağıntıların ve fonksiyonların sayısını bulur.
4. Fonksiyonların tanım,değer ve görüntü kümelerini bulur.
5. Birebir fonksiyon ve örten fonksiyon tanımlarını bilir ve verilen fonksiyonlara uygular.
6. Fonksiyonlarla ilgili toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve bileşke alma işlemlerini yapar.
7. Verilen bir fonksiyonun tersinin var olup olmadığını bilir ve tersi varsa bulur.
8. Polinom kavramını bilir ve polinomlarla işlemler yapar
9. Cebirsel fonksiyonu tanır ve tanım kümesini bulur.
10. Parçalı fonksiyon tanımını bilir ve problemle ilgili parçalı fonksiyonlar kurar.
11. Tam değer fonksiyonunu bilir ve verilen sayıların tam değerini hesaplar.

Bu bölümde önce bazı ön bilgiler verdikten sonra matematikte oldukça önemli bir yer tutan fonksiyon kavramı üzerinde durulacaktır.

3.1. SIRALI İKİLİ, KÜMELERİN KARTEZYEN ÇARPIMI VE KOORDİNAT DÜZLEMİ

Bu kısımda fonksiyonlar için oldukça önemli olan sıralı ikili ve kartezyen çarpım kavramları üzerinde duracağız.

Tanım. x ve y herhangi iki nesne olmak üzere

$$(x, y) = \{ x, \{x, y\}\}$$

kümesine "x , y *sıralı ikilisi*" denir. x e sıralı ikilinin *birinci bileşeni*, y ye ise sıralı ikilinin *ikinci bileşeni* adı verilir.

Bu durumda, tanımın direkt bir sonucu olarak,

$$\begin{aligned}(x, y) = (u, v) &\Leftrightarrow \{ x, \{x, y\}\} = \{ u, \{u, v\}\} \\ &\Leftrightarrow x = u,\ \{x, y\} = \{u, v\} \\ &\Leftrightarrow x = u,\ \{u, y\} = \{u, v\} \\ &\Leftrightarrow x = u,\ u = u,\ y = v \\ &\Leftrightarrow x = u,\ y = v\end{aligned}$$

olduğu görülür. İkinci satırda, bir nesne bir kümeye eşit olamayacağından $x = \{u, v\}$ ve $\{x, y\} = u$ eşitliklerinin mümkün olamayacağı kullanılmıştır. Böylece " $(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow x = u$, $y = v$ " sonucu elde edilir, <u>yani sıralı ikililerin eşitliği bileşen bileşene eşitlik anlamına gelmektedir.</u>

Eğer birinci ve ikinci bileşen aynı ise bir kümede bir eleman bir tek defa yer alabileceğinden $(x, x) = \{x, \{x\}\}$ olacaktır.

Örnek 1. $(a, 2)$, $(b, 1)$, $(b, 5)$, $(3, 1)$, $(2,2)$ birer sıralı ikilidirler. Eğer küme gösterimleriyle yazacak olursak örneğin $(b, 5)=\{b, \{b,5\}\}$, $(3,1)=\{3, \{3,1\}\}$ ve $(2,2)=\{2, \{2\}\}$ olur.

Örnek 2. a, b, 1, 2, 3 farklı nesneler olmak üzere

$$(a, 2) = \{a, \{a, 2\}\} \text{ ve } (2, a) = \{2, \{2, a\}\}$$

ve $a \neq 2$ olduğundan $(a, 2) \neq (2, a)$ dir. Diğer yandan, $1 \neq 3$ olduğundan $(b, 1) \neq (b, 3)$ dür.

Pratikte kullanışlı olması bakımından sıralı ikililerin $\{ x, \{x, y\}\}$ biçimindeki küme gösterimi yerine çoğunlukla bunun (x, y) biçimindeki gösterimi kullanılır.

Örnek 3. $(2x - 2 , y - 3) = (10, -3)$ olduğuna göre x ve y sayılarını bulalım. Sıralı ikililerin eşitliği tanımı hatırlanırsa, $2x - 2 = 10$ ve $y - 3 = -3$ olduğundan $x = 6$ ve $y = 0$ olduğu bulunur.

Tanım. A ve B kümeleri verilsin. Birinci bileşenleri A kümesinden ikinci bileşenleri B kümesinden seçilerek oluşturulan tüm sıralı ikililerin kümesine A ve B kümelerinin *kartezyen çarpımı* denir ve bu küme $A \times B$ ile gösterilir.

Bu tanıma göre $A \times B = \{ (a, b) \mid x \in A \text{ ve } y \in B \}$ dir.

Örnek 4. $A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 2, 3\}$ olmak üzere

$$A \times B = \{ (a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3) \}$$

olur.

Örnek 5. A ve B Örnek 4 de verilen kümeler olmak üzere

$$B \times A = \{ (1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c) \}$$

dir.

Bu iki örnekten görüldüğü gibi genellikle $A \times B \neq B \times A$ dır, yani kartezyen çarpımda kümelerin sırası önemlidir.

Örnek 6. $A = \{a, b, c\}$ ise

$$A \times A = \{ (a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c) \}$$

dir.

Genellikle $A \times A$ gösterimi yerine kısaca A^2 gösterimi kullanılır, yani $A \times A = A^2$ dir. Daha genel olarak A kümesinin kendisiyle n defa kartezyen çarpımı

$A \times A \times \ldots \times A = A^n = \{ (a_1, a_2, \ldots , a_n) \mid a_1, a_2, \ldots , a_n \in A \}$

biçiminde ifade edilir. Burada

$(a_1, a_2, \ldots , a_n) = \{a_1, \{a_1 , a_2\}, \{\{a_1 , a_2, a_3\}\}, \ldots , \{...\{a_1, a_2, \ldots , a_n\}...\}\}$

olup $(a_1, a_2, \ldots , a_n)$ ye bir *sıralı n-li* adı verilir. Sıralı n-liler daha çok ileri analiz derslerinin ilgi alanında olduğundan bu kitap boyunca sadece sıralı ikililer üzerinde durulacaktır.

3.1.1. Kartezyen Çarpımın Özellikleri

A, B ve C kümeleri verilsin, buna göre

1. $s(A \times B) = s(B \times A) = s(A)\ s(B)$

2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ ve $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

3. $A \times \phi = \phi \times A = \phi$

4. $A \times B = \phi$ ise $A = \phi$ veya $B = \phi$

5. $(x, y) \in A \times B$ ise $(y, x) \in B \times A$.

Bu özelliklerin doğru olduğu basit bazı işlemler sonucunda gösterilebilir. Örneğin

$$A \times \phi = \{ (x, y) \mid x \in A,\ y \in \phi \}$$

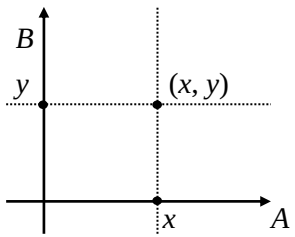
dir. ϕ kümesinde hiçbir y elemanı olmadığından ikinci bileşene konacak hiçbir eleman yoktur. Dolayısıyla $(x, y) \in A \times \phi$ olacak biçimde hiçbir (x, y) sıralı ikilisi yoktur. O halde $A \times \phi = \phi$ olur. Diğer özelliklerin gösterilmesini

okuyucuya bırakıyoruz. İsteyen okuyucular bunlar için kaynaklarda yer alan soyut matematik kitaplarından herhangi birinde bu ispatları bulabilirler.

Kartezyen çarpım birleşme özelliğini de sağlar, fakat üç kümenin kartezyen çarpımı sıralı üçlülerden oluşacağı için bu özellik sıralı üçlüler ile ilgili bir özelliktir. Bu kitap boyunca sıralı üçlülerle hiç ilgilenmeyeceğimiz için yukarıda yer alan özellikler arasına katmadık.

3.1.2. $A \times B$ Kümesinin Grafiği

$A \times B$ kümesinin elemanlarını oluşturan sıralı ikililer, çalışmalarımızda bize kolaylık sağlamak için, bazen düzlemin noktaları olarak düşünülebilirler. Bunun için bir düzlem ve bu düzlemde birbirine dik olan iki doğru alınır. Bu doğrulardan yatay olanının üzerine A kümesinin elemanları, dikey olanının üzerine B kümesinin elemanları, keyfi bir şekilde, yerleştirilir. A kümesinin yatay doğru üzerinde bulunan x elemanından dikey doğruya çizilen paralel ile, B kümesinin dikey doğru üzerinde bulunan y elemanından yatay doğruya çizilen paralel doğrunun kesiştikleri nokta (x, y) ile gösterilir



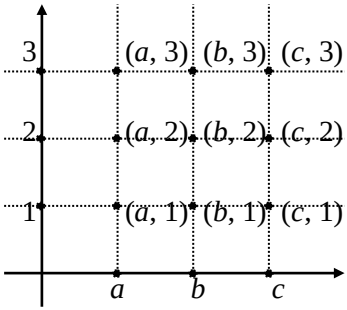
Şekil 3.1.1

ve böylece $(x, y) \in A \times B$ elemanının düzlemdeki karşılığı elde edilir. $A \times B$ kümesinin tüm elemanlarının düzlemde oluşturduğu kümeye $A \times B$ *kartezyen çarpımının grafiği* denir. A ve B kümesinin elemanlarının yatay ve dikey doğru üzerine yerleştirilme biçimine göre grafik görsel olarak değişir fakat grafiği oluşturan noktalara karşılık gelen sıralı ikililerin kümesi değişmez.

Örnek 7. $A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 2, 3\}$ olmak üzere

$$A \times B = \{ (a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3) \}$$

kartezyen çarpımının grafiği aşağıdaki gibidir



Şekil 3.1.2

Buraya kadar verilen örneklerde hep sonlu kümelerin kartezyen çarpımları bulundu. Bir kartezyen çarpımda kümelerden biri veya ikisi de sonlu küme olmayabilir. Kartezyen çarpım tanımında kartezyen çarpımları bulunacak kümelerin sonlu veya sonsuz olması hakkında hiçbir şart yoktur. A veya B den en az birinin sonsuz bir küme olması durumunda A×B kartezyen çarpım kümesinin de sonsuz sayıda elemanı olacağından elemanlarının tamamını liste biçiminde vermek mümkün olmayacaktır. Bu durumda A×B kümesi ortak özellik yöntemi ile verilir. Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz:

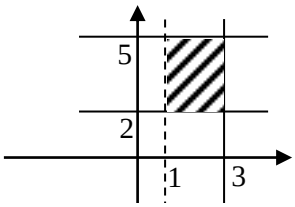
Örnek 8. A=(1,3], B=[2,5] iken

$$A \times B = (1,3] \times [2,5] = \{(x, y) \mid x \in (1,3],\ y \in [2,5]\} = \{(x, y) \mid 1 < x \le 3,\ 2 \le y \le 5\}$$

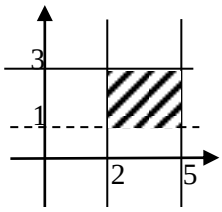
$$B \times A = [2,5] \times (1,3] = \{(x, y) \mid x \in [2,5],\ y \in (1,3]\} = \{(x, y) \mid 2 \le x < 3,\ 1 < y \le 3\}$$

$$A \times A = (1,3] \times (1,3] = \{(x, y) \mid x \in (1,3],\ y \in (1,3]\} = \{(x, y) \mid 1 < x \le 3,\ 1 < y \le 3\}$$

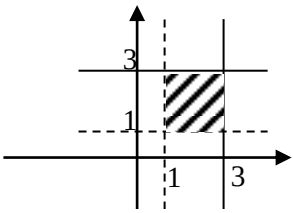
olur ve bu kartezyen çarpımların grafikleri aşağıdaki gibidir:



(1,3]×[2,5]

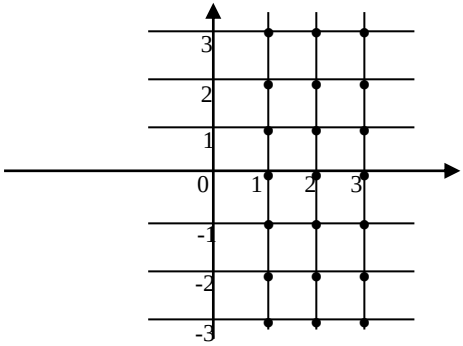


[2,5]×(1,3]

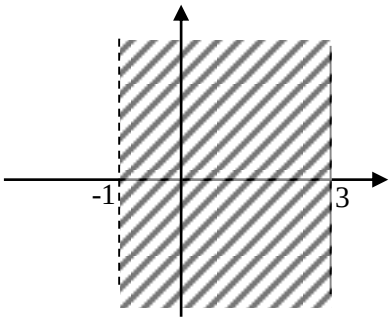


(1,3]×(1,3]

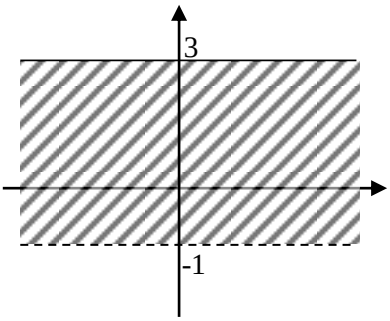
Örnek 9. $A=\{1,2,3\}$, $B=\mathbb{Z}$ iken $A\times B=\{(x,y)|x\in\{1,2,3\},\ y\in\mathbb{Z}\}$ olur ve grafiği aşağıdaki gibidir, aslında grafiğin y ekseni boyunca her iki yöne doğru uzayıp gittiğini düşünmek gerekir. Grafikte bu noktalardan sadece bir kısmı gösterilmiştir. Bu örnek için $B\times A$ yı ve grafiğini siz bulunuz ve çiziniz.



Örnek 10. $A=(-1,3]$ ve $B=\mathbb{R}$ iken $A\times B = \{(x,y)|\ x\in(-1,3],\ y\in\mathbb{R}\}$ ve $B\times A=\{(x,y)|\ x\in\mathbb{R},\ y\in(-1,3]\}$ olup, sırasıyla dikey ve yatay şerite benzeyen grafikleri aşağıdaki gibidir:



$(-1,3]\times\mathbb{R}$ nin grafiği

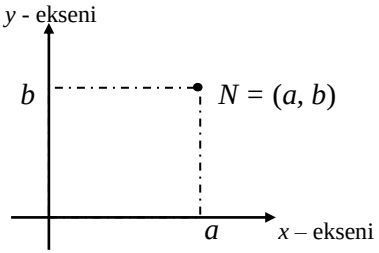


$\mathbb{R}\times(-1,3]$ ün grafiği

3.1.3. Koordinat Düzlemi

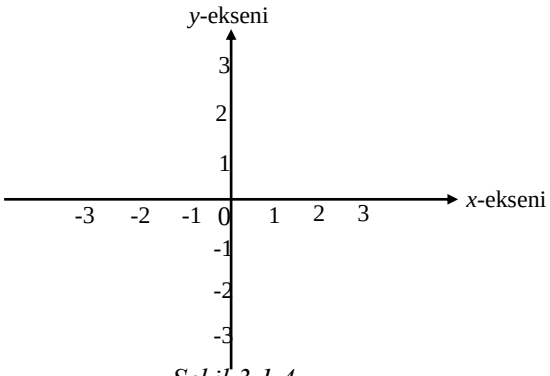
Düzlemde herhangi bir N noktası verildiğinde, bu noktadan sayı eksenlerine indirilen dikmelerin eksenleri kestiği noktalara sırasıyla a ve b denirse N noktasıyla (a, b) sıralı ikilisi eşlenmiş olur ve N noktası $N = (a, b)$ biçiminde gösterilir, a sayısına *N noktasının apsisi* (veya *birinci bileşeni*),

b sayısına da *N noktasının ordinatı* (veya *ikinci bileşeni*) denir. Seçilen sayı eksenlerine *koordinat eksenleri*, apsislerin bulunduğu koordinat eksenine *apsisler ekseni* (ya da kısaca *x-ekseni*), ordinatların bulunduğu koordinat eksenine de *ordinatlar ekseni* (ya da kısaca *y-ekseni*) adı verilir. Düzlemin noktalarına bu şekilde sıralı ikililer karşılık tutulması işlemine *düzlemin koordinatlanması*, birbirine dik iki sayı doğrusu olan koordinat eksenlerinden oluşan sisteme *koordinat sistemi*, üzerinde yukarıdaki gibi bir koordinat sistemi seçilmiş olan düzleme de *koordinat düzlemi* denir.



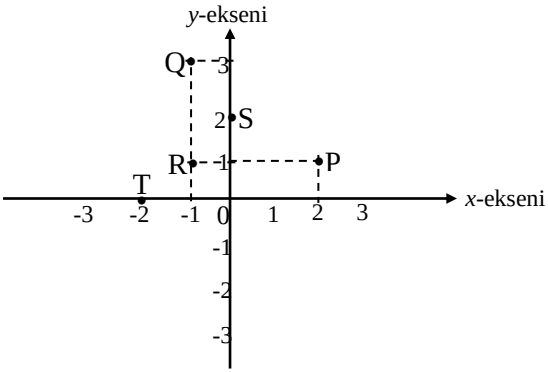
Şekil 3.1.3

Bir düzlem koordinatlanırken *x* ve *y*-eksenleri üzerindeki sayılar



Şekil 3.1.4

şekildeki gibi ardışık olarak dizilir. Şekilden de görüldüğü gibi *x* ve *y* eksenlerinin arakesitine sıfır sayısı yerleştirilir ve *x* ekseni üzerine sıfırın sağına tüm pozitif sayıların, sıfırın soluna tüm negatif sayıların, *y* ekseni üzerine sıfırın üstüne tüm pozitif sayıların, sıfırın altına tüm negatif sayılar sıralı bir biçimde yerleştirildiği kabul edilir. Sadece tamsayılar değil tüm reel sayıların da bu eksenlerde yerlerini aldığı düşünülür. Buna göre



Şekil 3.1.5

$P = (2, 1)$, $Q = (-1, 3)$, $R = (-1, 1)$, $S = (0, 2)$, $T = (-2, 0)$ noktalarının koordinat düzlemindeki yerleri Şekil 3.1.5. de gösterilmiştir. Özel olarak x ve y-eksenlerinin kesiştiği nokta $O = (0, 0)$ olur ve bu noktaya *orijin* (veya *orjin* veya *başlangıç*) adı verilir. x-ekseni üzerindeki herhangi bir a sayısına $(a, 0)$ koordinatları, y-ekseni üzerindeki herhangi bir b sayısına $(0, b)$ koordinatları karşılık gelir.

3.2. BAĞINTI

Bu kısımda bizi fonksiyon kavramına ulaştıracak olan bağıntı kavramı üzerinde duracağız.

Tanım. A ve B gibi herhangi iki küme verilsin. $A \times B$ kümesinin her alt kümesine A kümesinden B kümesine bir *bağıntı* denir. A kümesine *bağıntının kaynağı*, B kümesine ise *bağıntının hedefi* veya *varışı* adı verilir.

Bağıntılar genellikle $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ gibi harfler ile gösterilir.

Tanımdan anlaşılacağı gibi $\beta \subset A \times B$ ise β, A kümesinden B kümesine bir bağıntıdır. Özel olarak $A \times A$ kartezyen çarpımının alt kümelerine de A kümesinden A kümesine bağıntı denir.

$x \in A$ ve $y \in B$ için $(x, y) \in \beta$ ise $x \beta y$ veya $\beta(x) = y$ veya

$$\beta : A \to B$$
$$x \to y$$

yazılır ve "x elemanının β bağıntısı altındaki görüntüsü y elemanıdır" veya "β bağıntısı x elemanını y elemanına eşler" diye okunur. Aynı zamanda $(x, y)\in\beta$ ise "y nin β altındaki ters görüntüsü x dir" denir ve bu durum $\beta^{-1}(y) = x$ biçiminde gösterilir.

Örnek 1. A = $\{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 2, 3\}$ olmak üzere A×B nin alt kümesi olan her küme A dan B ye bir bağıntı olacağından,

$$\alpha = \{ (a, 1), (a, 2), (a, 3) \}$$

$$\beta = \{ (a, 1), (b, 1), (c, 1) \}$$

$$\gamma = \{ (c, 1), (c, 2), (c, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3) \}$$

$$\delta = \{ (a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2) \}$$

kümeleri A kümesinden B kümesine birer bağıntıdır. Buna göre

$$\alpha(a) = \{1, 2, 3\},\ \beta(b) = \{1\},\ \gamma(c) = \{1, 2, 3\} \text{ ve } \delta(b) = \{1, 2\}$$

ve

$$\alpha^{-1}(3) = \{a\},\ \beta^{-1}(3) = \phi,\ \gamma^{-1}(2) = \{c, b\} \text{ ve } \delta^{-1}(3) = \phi$$

olur.

Eğer $\beta(x) = \{y\}$ ise, yani x 'in görüntüsü bir tek elemanlı bir küme ise, bu genellikle $\beta(x) = y$ biçiminde gösterilir. Buna göre yukarıdaki örnekte verilen bağıntılar için

$$\alpha^{-1}(3) = a,\ \beta(b) = 1$$

dir.

Bir elemanın görüntüsü boş küme ise *bu elemanın görüntüsü yoktur* denir. Benzer şey ters görüntü için de geçerlidir.

Örnek 2. $\mathbb{Z}$ tan sayılar kümesinden $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesine bazı bağıntı örnekleri verelim. Bu tür örnekler

$$\alpha = \{(-1,3), (-1,5), (0,0), (1,7)\}$$

biçiminde $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ nin sonlu sayıda elemanlarından oluşan kümeler olarak verilebileceği gibi, $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ nin sonsuz sayıda elemanından oluşan bağıntı örnekleri de vermek mümkündür. Bu durumda elemanların görüntülerini tek tek belirtmek mümkün olmadığından, bağıntı genellikle bir kural ile verilir. Örneğin

$$\beta=\{(x,y)|\ x^2+y=4,\ x\in\mathbb{Z},y\in\mathbb{N}\}$$

böyle bir bağıntı olup bu bağıntı

$$\beta=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\ |\ x^2+y=4\}$$

veya

$$\beta=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\ |\ y=4-x^2\}$$

veya

$$\begin{aligned}\beta:\mathbb{Z}&\to\mathbb{N}\\ x&\to\beta(x)=4-x^2\end{aligned}$$

biçiminde gösterilebilir. Bu durumda örneğin

$$\beta(2)=4-2^2=4-4=0,\ \ \beta(5)=4-5^2=4-25=-21,\ \ \beta(-2)=4-(-2)^2=4-4=0$$

olur. Basit hesaplamalar ile $\beta^{-1}(0)=\{2,-2\}$, $\beta^{-1}(3)=\{1,-1\}$ ve $\beta^{-1}(2)=\{\ \}$ olduğu görülür.

3.2.1. Bağıntı Sayısı

A ve *B* herhangi iki sonlu küme ve $s(A) = m$, $s(B) = n$ olsun. *A* dan *B* ye bir bağıntı $A \times B$ kümesinin herhangi bir alt kümesi olduğundan, $A\times B$ nin alt kümelerinin sayısı *A* dan *B* ye bağıntıların sayısını verecektir. Bu durumda,

$$s(A \times B) = s(A)\ \ s(B) = m\ .\ n$$

olması, $A \times B$ kartezyen çarpımının alt kümelerinin sayısının 2^{mn} olmasını gerektirdiğinden *A* dan *B* ye olan bağıntıların sayısı 2^{mn} tanedir. Benzer olarak *B* den *A* ya olan bağıntıların sayısı da 2^{mn} tanedir. Bu durumda *A* dan *A* ya olan bağıntıların sayısının 2^{m^2} olacağı bellidir. *A* veya *B* den herhangi biri sonsuz elemanlı bir küme iken *A* dan *B* ye sonsuz çoklukta bağıntı var olacaktır.

Örnek 3. $A=\{a,b,c\}$ ve $B=\{1,2,3\}$ olsun. $s(A) = 3$ ve $s(B) = 3$ olduğundan *A* dan *B* ye olan bağıntıların sayısı $2^{3.3} = 2^9 = 512$ dir. Diğer yandan *A* dan *A* ya olan bağıntıların sayısı ise $2^{3^2} = 2^9 = 512$ dir.

Örnek 4. $A = \{1, 2\}$ ve $B = \{a, b\}$ olmak üzere A kümesinden B kümesine olan tüm bağıntıları bulalım.

$$A \times B = \{ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b) \}$$

olduğundan A dan B ye $2^4 = 16$ tane bağıntı vardır. Bunlar

$\beta_1 = \phi$,

$\beta_2 = \{(1, a)\}$, $\beta_3 = \{(1, b)\}$, $\beta_4 = \{(2, a)\}$, $\beta_5 = \{(2, b)\}$,

$\beta_6 = \{(1, a), (1, b)\}$, $\beta_7 = \{(1, a), (2, a)\}$, $\beta_8 = \{(1, a), (2, b)\}$,

$\beta_9 = \{(1, b), (2, a)\}$, $\beta_{10} = \{(1, b), (2, b)\}$, $\beta_{11} = \{(2, a), (2, b)\}$,

$\beta_{12} = \{(1, a), (1, b), (2, a)\}$, $\beta_{13} = \{(1, a), (1, b), (2, b)\}$,

$\beta_{14} = \{(1, a), (2, a), (2, b)\}$, $\beta_{15} = \{(1, b), (2, a), (2, b)\}$,

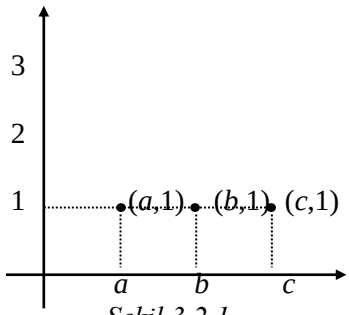
$\beta_{16} = \{ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\} = A \times B$

dir.

3.2.2. Bağıntının Grafiği

β, A kümesinden B kümesine bir bağıntı, yani $\beta \subset A \times B$ olsun. $A \times B$ kümesinin düzlemdeki gösteriminin β alt kümesine ait olanlarının oluşturduğu kümeye β *bağıntısının grafiği* denir.

Örnek 1. $A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere
$\beta = \{ (a, 1), (b, 1), (c, 1) \}$ bağıntısının grafiği aşağıdaki şekildeki gibidir.

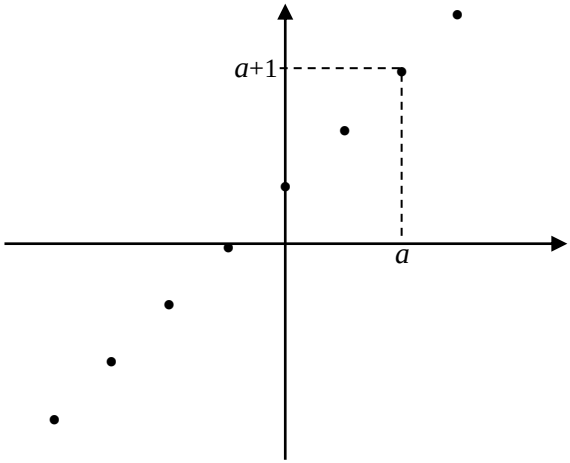


Şekil 3.2.1

Örnek 2. α: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, α=[-1,1]×[-1,1] ={(x,y)| $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$}, $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye bir bağıntıdır. Bu bağıntı bir kartezyen çarpıma eşit olarak alınmış

olduğundan grafiği kartezyen çarpımın grafiği gibi çizilir. Daha önce verilen örneklere bakarak bu bağıntının grafiğini çiziniz.

Örnek 3. $\gamma: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\gamma(x)=x+1$ kuralı ile verilen bağıntının her tamsayıyı bir fazlasına götüreceği bellidir. Grafik aşağıdaki gibidir:



3.3. FONKSİYON

Bu bölümde önce fonksiyon kavramını tanımlayacağız. Daha sonra fonksiyonların temel özellikleri üzerinde duracağız ve bazı özel fonksiyonları ele alacağız. Son olarak da fonksiyonlarla yapılan işlemleri tanıtacağız.

Tanım. A ve B boş olmayan herhangi iki küme ve β, A kümesinden B kümesine bir bağıntı olsun. Eğer β bağıntısı altında A kümesindeki bütün elemanların B kümesinde görüntüsü var ve bu görüntü bir tek ise β bağıntısına A kümesinden B kümesine bir *fonksiyon* denir. Fonksiyonlar genellikle f, g, h, ... gibi harfler ile gösterilir.

Açıklama. Tanıma dikkat edilirse, A dan B ye bir fonksiyon aslında özel bir bağıntıdan başka bir şey değildir. A dan B ye bir bağıntının fonksiyon olabilmesi için A kümesindeki her elemanın B kümesinde bir ve yalnız bir görüntüsünün olması yeterlidir.

$s(A)=m$, $s(B)=n$ ise A dan B ye fonksiyonların sayısı n^m dir.

Bu açıklamaya göre her fonksiyon bir bağıntı olmasına karşılık, her bağıntı bir fonksiyon olmayabilir.

Örnek 1. $A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 2, 3\}$ olmak üzere

$\alpha = \{ (a, 1), (a, 2), (a, 3) \}$

$\beta = \{ (a, 1), (b, 1), (c, 1) \}$

$\gamma = \{ (c, 1), (c, 2), (c, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3) \}$

$\delta = \{ (a, 1), (b, 3), (c, 3)\}$

biçiminde tanımlı α, β, γ ve δ kümelerinin hepsi A kümesinden B kümesine birer bağıntıdır. Ancak bunlardan sadece β ve δ, A kümesinden B kümesine bir fonksiyondur. α, bir fonksiyon değildir. Çünkü A kümesinin b ve c elemanları B kümesinin herhangi bir elemanı ile eşlenmediği gibi a elemanı B kümesinin 1, 2 ve 3 elemanları ile eşlenmiştir. γ da A dan B ye bir fonksiyon değildir, çünkü a hiçbir eleman ile eşlenmediği gibi c ve b elemanları birden fazla eleman ile eşlenmiştir. β ve δ ise birer fonksiyondur, çünkü ikisi için de, A kümesindeki her eleman B kümesindeki bir eleman ile eşlenmiştir ve her bir elemanın görüntüsü bir tektir.

Örnek 2. $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye $\alpha=\{(x,y)|\ x-y=3\}$, $\beta=\{(x,y)|\ x-y^2=1\}$ bağıntılarından α bir fonksiyon olduğu halde β fonksiyon değildir. Örneğin (1,-1) ve (1,1) sıralı ikililerinin ikisi de β nın elemanıdır. Yani 1 elemanının β altında birden fazla görüntüsü vardır ve bu fonksiyon olma şartına ters düşmektedir. $x-y=3$ olması $y=x-3$ olması anlamına gelip, her $x\in\mathbb{R}$ için x in α altındaki görüntüsü olan $x-3\in\mathbb{R}$ elemanı bir tek olduğundan α bir fonksiyondur.

Tanım. f, A kümesinden B kümesine bir fonksiyon yani

$$f : A \to B$$

olsun. Bu durumda A kümesine f fonksiyonunun *tanım kümesi*, B kümesine ise f fonksiyonunun *değer kümesi* denir.

Tanım kümesindeki tüm elemanların f altındaki görüntülerinden oluşan kümeye f fonksiyonunun *görüntü kümesi* denir ve bu küme $f(A)$ ile gösterilir, yani

$$f(A) = \{ f(a) \mid a\in A \} \subset B$$

dir.

Benzer biçimde $X \subset A$ olduğunda

$$f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \} \subset B$$

kümesine *X in f altındaki görüntüsü*, $Y \subset B$ olduğunda

$$f^{-1}(Y) = \{ x \in A \mid f(x) \in Y \} \subset A$$

kümesine *Y nin f altındaki ters görüntüsü* denir.

$f : A \to B$ ve $g : C \to D$ iki fonksiyon olsun. Eğer $A = C$ ve her $a \in A$ için $f(a) = g(a)$ ise f ve g fonksiyonlarına *eşit fonksiyonlar* denir ve $f = g$ yazılır. Buna göre iki fonksiyon eşit ise bunların görüntü kümeleri eşit, yani $f(A) = g(C)$ dır, değer kümelerinin ise eşit olması gerekmez.

Örnek 3. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ve $B = \boldsymbol{R}$ olmak üzere

$$f : A \to B, \ f(x) = 2x + 1$$

olarak tanımlı f bağıntısını dikkate alalım. Buna göre

$$f = \{ (1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9), (5, 11), (6, 13) \}$$

olur. Dikkat edilirse f, A kümesinden B kümesine bir fonksiyondur ve

$$f(A) = \{ 3, 5, 7, 9, 11, 13 \} \subset \boldsymbol{R}$$

dir. $X = \{1, 3, 5\} \subset A$ için

$$f(X) = \{ 3, 7, 11\}$$

ve $Y = (0, 11) \subset B$ için

$$f^{-1}(Y) = \{ x \in A \mid f(x) \in Y \} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \subset A$$

olduğu bulunur.

Örnek 4. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=x+1$,

$h:\mathbb{N}\to\mathbb{R}, h(x)=x+1$,

$g:\mathbb{Z}\to\mathbb{R},\ g(x)=x+1$

dönüşümlerinin üçü de fonksiyondur. f ve g nin tanım kümeleri aynıdır ($\mathbb{Z}$ dir) ve tanım kümelerinden alınan her x elemanı için $f(x)=g(x)=x+1$ olduğundan f ve g fonksiyonları eşittir, yani $f=g$ dir. Her $x\in\mathbb{N}$ için $f(x)=h(x)=g(x)=x+1$ olduğu halde h ile f nin tanım kümeleri aynı olmadığından $h\neq f$ dir ve benzer biçimde halde h ile g nin tanım kümeleri aynı olmadığından $h\neq g$ dir

Örnek 5. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$ fonksiyonu için $f(\{-1,3,5,6\})$, $f^{-1}([1,4])$ ve $f^{-1}((0,4])$ kümeleri sırasıyla {1,4,6,7}, {0,1,2,3} ve {0,1,2,3} olur.

3.3.1. Bazı Özel Fonksiyonlar

Bu kısımda çok sık bazı özel fonksiyon türlerini kısaca tanıtacağız.

I. Birim Fonksiyon. Herhangi bir A kümesi için

$$i : A \to A,\ i(x) = x$$

biçiminde tanımlanan i fonksiyonuna *birim fonksiyon* (veya *özdeşlik fonksiyonu*) denir ve eğer hangi küme üzerinde tanımlandığı belirtilecek ise i_A ile gösterilir.

Dikkat edilirse i_A fonksiyonunun tanım, değer ve görüntü kümesi A kümesidir.

Örnek 1. A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ise, A üzerinde tanımlı i özdeşlik fonksiyonu için,

$$i(2) = 2,\ i(5) = 5,\ i(\{1, 3, 6\}) = \{1, 3, 6\} \text{ ve } i(A) = A$$

dir. $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı i özdeşlik fonksiyonu için de

$$i(2) = 2,\ i(5) = 5,\ i(\{1, 3, 6\}) = \{1, 3, 6\} \text{ ve } i(A) = A$$

olduğu gibi aynı zamanda $i(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, $i(\frac{3}{5}) = \frac{3}{5}$ ve $i([0,2)) = [0,2)$ dir.

II. Sabit Fonksiyon. A ve B kümeleri için $y_o \in B$ belli bir eleman olmak üzere

$$f : A \to B,\ f(x) = y_o$$

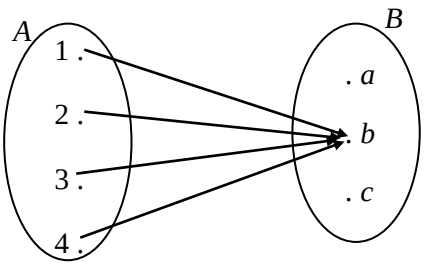
biçiminde tanımlı f fonksiyonuna *sabit fonksiyon* denir.

Tanımdan anlaşılacağı gibi, f sabit fonksiyonu altında A kümesindeki her elemanın resmi hep aynı $y_o \in B$ elemanıdır ve dolayısıyla $f(A) = \{y_o\}$ dır.

Örnek 2. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{a, b, c\}$ olmak üzere

$$g : A \to B$$

fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanıyor. g fonksiyonu A dan B ye bir sabit fonksiyondur.



Acaba bu örnekte verilen A kümesinden B kümesine kaç tane farlı sabit fonksiyon tanımlanabilir? Bu sorunun cevabı gayet açıktır: 3 tane. A nın tüm elemanlarını a ya götüren, A nın tüm elemanlarını b ye götüren ve son olarak A nın tüm elemanlarını c ye götüren dönüşümler A dan B ye tüm sabit fonksiyonları verecektir. B de a, b ve c den başka eleman olmadığından bu üçünden başka sabit fonksiyon da yoktur.

Genel olarak söylemek gerekirse A ve B hangi kümeler olursa olsun A kümesinden B kümesine B nin eleman sayısı kadar farklı sabit fonksiyon vardır. Eğer B kümesi sonsuz sayıda eleman kapsıyorsa A dan B ye sonsuz kurulabilecek sabit fonksiyonlar da sonsuz sayıda olacaktır.

Örnek 3. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 5$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonu bir sabit fonksiyondur. Çünkü tanım kümesi olan $\mathbb{Z}$ deki tüm elemanların görüntüsü 5 tir. $\mathbb{Z}$ kümesinden $\mathbb{N}$ ye kaç tane sonsuz çoklukta sabit fonksiyonun kurulabileceği aşikardır.

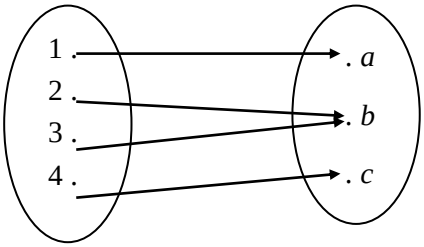
III. Birebir Fonksiyon. A ve B kümeleri ve bir

$$f : A \to B$$

fonksiyonu verilsin. Her $x, y \in A$ için $f(x) = f(y)$ olduğunda $x = y$ oluyor ise f fonksiyonuna *birebir fonksiyon* denir ve kısaca "$f : A \to B$ 1:1 dir" biçiminde gösterilir.

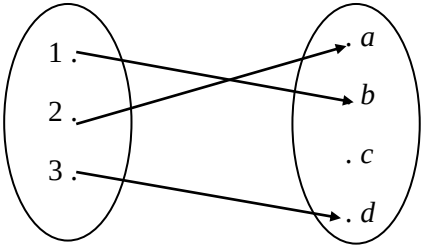
Bu tanıma denk olarak birebir fonksiyon tanımı "her $x, y \in A$ için $x \neq y$ olduğunda $f(x) \neq f(y)$ oluyor ise f fonksiyonuna birebir fonksiyon denir" biçiminde de verilebilir. Bunun anlamı "f fonksiyonu farklı elemanları farklı elemanlar ile eşler" yani "farklı elemanları aynı bir elemana eşlemez" demektir. A ve B kümeleri için $s(A) > s(B)$ ise A dan B ye bire bir olacak biçimde hiçbir fonksiyon bulunamayacağı aşikardır. O halde $s(A)=m$, $s(B)=n$ ve $m \leq n$ iken A dan B ye birebir fonksiyonlar bulmak mümkündür. Bu durumda A dan B ye tam olarak $\dfrac{n!}{(n-m)!}$ tane birebir fonksiyon bulmak mümkündür (Bu iddianın ispatı için kaynaklarda yer alan soyut matematik kitaplarına bakılabilir.).

Örnek 4. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{a, b, c\}$ olmak üzere



biçiminde tanımlanan $f : A \to B$ fonksiyonu birebir fonksiyon değildir, çünkü $2 \neq 3$ olduğu halde $f(2) = f(3) = b$ dir.

Örnek 5. $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{a, b, c, d\}$ olmak üzere



biçiminde tanımlanan $g : A \to B$ fonksiyonu birebir fonksiyondur. Bu iki küme arasında $\dfrac{4!}{(4-3)!} = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ tane birebir fonksiyon bulmak mümkündür.

Örnek 6. $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ **,** $f(x) = 2x + 1$ fonksiyonunu dikkate alalım. Her $x, y \in \boldsymbol{R}$ için $x \neq y$ olduğunda $2x \neq 2y$ ve dolayısıyla da $2x + 1 \neq 2y + 1$, yani $f(x) \neq f(y)$ dir, yani f fonksiyonu birebir fonksiyondur.

Örnek 7. $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ **,** $g(x) = x^2$ fonksiyonu ise $2 \neq -2$ olduğu halde $g(2) = g(-2) = 4$ olduğundan birebir değildir.

IV. Örten Fonksiyon. A ve B kümeleri ve bir

$$f : A \to B$$

fonksiyonu verilsin. Her $y \in B$ elemanı için $f(x) = y$ olacak biçimde en az bir $x \in A$ var ise f fonksiyonuna *örten* (veya *üzerine*) *fonksiyon* denir.

Tanıma dikkat edilirse f örten bir fonksiyon iken tanım kümesinde değer kümesindeki her bir eleman ile eşleşen en az bir eleman vardır. O halde

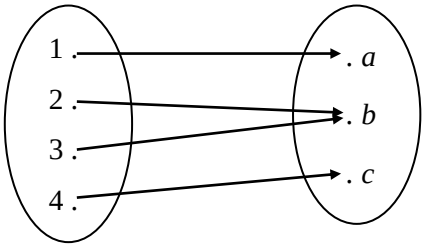
$$f : A \to B$$

fonksiyonu örten ise $f(A) = B$ dir. A ve B kümeleri için $s(A) < s(B)$ ise A dan B ye örten olacak biçimde hiçbir fonksiyon bulunamayacağı tanımdan çıkan aşikar bir sonuçtur. $s(A)=m$, $s(B)=n$ ve $m \geq n$ iken A dan B ye

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^m$$

adet örten fonksiyon tanımlamak mümkündür.

Örnek 8. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{a, b, c\}$ olmak üzere



biçiminde tanımlanan $f : A \to B$ fonksiyonu örten fonksiyondur. Bu örnekte verilen A ve B kümeleri için s(A)=4 ve s(B)=3 olup

$$\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\binom{3}{3-k}(3-k)^4 = (-1)^0\binom{3}{3}3^4 + (-1)^1\binom{3}{2}2^4 + (-1)^2\binom{3}{1}1^4 + (-1)^3\binom{3}{0}0^4$$

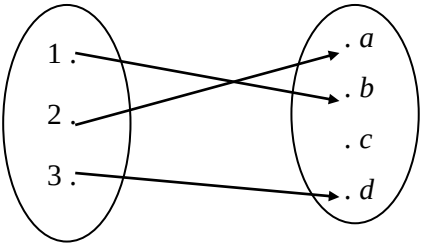
$$= 3^4 - 3\cdot 2^4 + 3$$

$$= 81 - 45$$

$$= 36$$

tane örten fonksiyon bulmak mümkündür.

Örnek 9. $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{a, b, c, d\}$ olmak üzere



biçiminde tanımlanan $g : A \to B$ fonksiyonu örten değildir.

Örnek 10. Örnek 6 da birebir olduğunu gördüğümüz

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ f(x) = 2x + 1$$

fonksiyonunun aynı zamanda örten olduğunu görelim. f fonksiyonunun hedef kümesi olan $\mathbb{R}$ den alınan herhangi bir y elemanı için $f(x) = y$ olacak biçimde en az bir x elemanının f fonksiyonunun kaynağı olan $\mathbb{R}$ de var olduğunu göstermeliyiz. Eğer bu x sayısı

$$x = \frac{y-1}{2}$$

olarak seçilirse,

$$f\left(\frac{y-1}{2}\right) = 2\left(\frac{y-1}{2}\right) + 1 = (y-1) + 1 = y$$

olduğu görülür, yani verilen her $y \in \mathbb{R}$ için $f(x) = y$ olacak biçimde en az bir $x \in \mathbb{R}$ vardır. (Burada $x = \frac{y-1}{2}$ seçilme nedeni $f(x) = y$ olması istendiğindendir. Çünkü $f(x) = y$ olacaksa $f(x) = 2x + 1$ olduğundan $2x + 1 = y$ olmalıdır ki bu $x = \frac{y-1}{2}$ sonucunu verir.)

Örnek 11. Örnek 7 de verilen

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \ g(x) = x^2$$

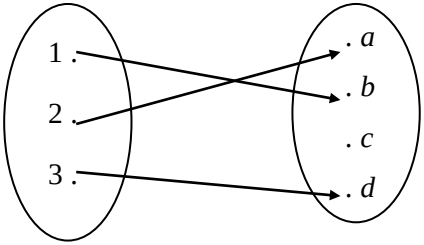
fonksiyonu ise örten değildir, çünkü g fonksiyonunun hedef kümesinden alınan – 4 elemanı için g fonksiyonunun kaynağında $g(x) = -4$ (yani karesi – 4) olacak biçimde bir $x \in \mathbb{R}$ yoktur, çünkü her reel sayının karesi negatif olmayan bir gerçel sayıdır. g fonksiyonu örten olmadığından $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ dir.

Soru: $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ **,** $h(x) = x^2$ fonksiyonu örtendir, neden?

V. İçine Fonksiyon. A ve B kümeleri ve bir $f : A \to B$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonu örten değil ise f fonksiyonuna *içine fonksiyon* denir.

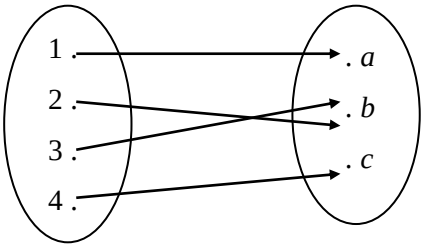
Bu durumda $f : A \to B$ fonksiyonunun içine olması için gerek ve yeter şart $f(A) \subset B$ olmasıdır. A dan B ye tüm fonksiyonların sayısından örten fonksiyonların sayısı çıkarılarak A dan B ye içine fonksiyonların sayısı bulunabilir.

Örnek 12. $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{a, b, c, d\}$ olmak üzere



biçiminde tanımlanan $g : A \to B$ fonksiyonu içine fonksiyondur, çünkü $g(A) = \{a, b, d\} \subset B$.

Örnek 13. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{a, b, c\}$ olmak üzere



biçiminde tanımlanan $f : A \to B$ fonksiyonu ise içine değildir, çünkü $f(A) = B$ dir.

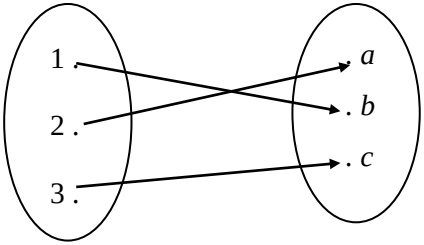
Örnek 14. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ fonksiyonu içine değildir, çünkü $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ olduğu yani f fonksiyonunun örten olduğu Örnek 10 da gösterilmişti.

Örnek 15. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ fonksiyonu içinedir, çünkü $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ olduğu Örnek 11 de gösterilmişti.

VI. Birebir ve Örten Fonksiyon. Bir $f : A \to B$ fonksiyonu hem birebir hem de örten ise f fonksiyonuna A dan B ye *birebir ve örten fonksiyon* denir.

Buna göre A ve B kümeleri için $s(A) \neq s(B)$ ise A dan B ye birebir ve örten olacak biçimde hiçbir fonksiyon bulunamayacağı aşikardır. Eğer $s(A)=s(B)=n$ ise A dan B ye $n!$ Tane birebir ve örten fonksiyon bulmak mümkündür.

Örnek 16. $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{a, b, c\}$ olmak üzere



biçiminde tanımlanan $g : A \to B$ fonksiyonu birebir ve örten bir fonksiyondur. Bu örnekte s(A)=s(B)=3 olduğundan A dan B ye 3!=6 tane birebir ve örten olan fonksiyon bulmak mümkündür. Sonlu elemanlı kümeler arsındaki birebir ve örten fonksiyonlar tanım kümelerinin elemanları birinci, ve bu elemanların görüntüleri de hemen altlarındaki ikinci satıra yazılarak da gösterilebilir. Örneğin yukarıda Venn şeması ile verilen g fonksiyonu

$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & a & c \end{pmatrix}$ biçiminde gösterilebilir. Bu örnekte verilen A ve B kümeleri arasında birebir ve örten olarak bulunabilecek tüm fonksiyonlar, bu son gösterim biçimi ile, aşağıda verilmiştir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & c & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ c & a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & c & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ c & b & a \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & a & c \end{pmatrix}$$

Tanım ve değer kümeleri aynı olan birebir ve örten fonksiyonlara özel bir isim verilir ve *permütasyon* denir. Örnek olarak yukarıda a=1, b=2 ve c=3 alındığında A=B olur ve aralarında kurulabilecek tüm permütasyonlar

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

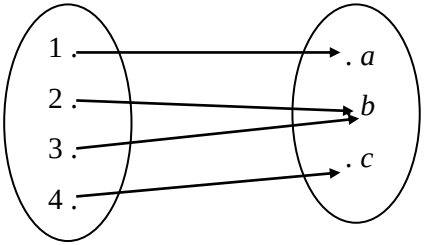
olarak bulunur. Genellikle n elemanlı bir kümenin tüm permütasyonlarının kümesi S_n ile gösterilir. Yani, $S_n = \{ f \mid f : A \to A, \textit{birebir ve örten} \}$ dir. O halde,

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

olur.

Soru: S_2 ve S_4 kümelerinin elemanlarını da siz bulun, bu kümeler kaç elemanlıdır?

Örnek 17. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{a, b, c\}$ olmak üzere



biçiminde tanımlanan $f : A \to B$ birebir ve örten bir fonksiyon değildir, çünkü bu fonksiyon örten olmasına karşılık bire bir değildir (Neden?).

Örnek 18. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ fonksiyonun birebir olduğu Örnek6 da, örten olduğu Örnek10 da gösterildi, dolayısıyla f birebir ve örten bir fonksiyondur.

Örnek 19. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ fonksiyonu ise ne birebir ne de örten bir fonksiyondur, dolayısıyla birebir ve örten bir fonksiyon değildir. (Örnek7 ve Örnek11 e bakınız.)

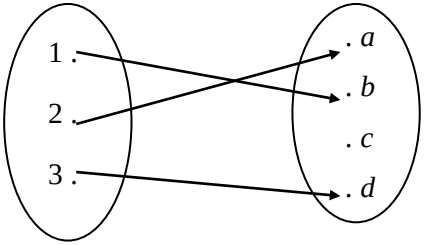
VII. Birebir ve İçine Fonksiyon. A ve B kümeleri ve bir

$$f : A \to B$$

fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu birebir ve aynı zamanda içine ise f fonksiyonuna *birebir ve içine fonksiyon* denir.

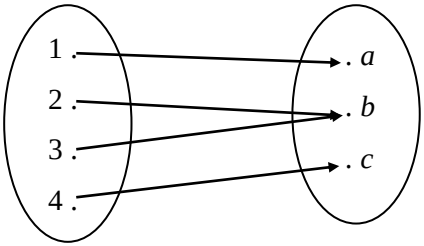
Soru: A ve B kümeleri ne olursa olsun A dan B ye birebir ve içine fonksiyon var mıdır? Neden? A *ve* B sonlu kümeler iken A dan B ye birebir ve içine olan fonksiyonların sayısı nasıl hesaplanır?

Örnek 20. $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{a, b, c, d\}$ olmak üzere



biçiminde tanımlanan $g : A \to B$ fonksiyonu birebir ve içine fonksiyondur.

Örnek 21. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{a, b, c\}$ olmak üzere



biçiminde tanımlanan $f : A \to B$ fonksiyonu birebir ve içine değildir, çünkü bu fonksiyon hem içine değil, hem de birden bir değildir (Neden?).

Örnek 22. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ fonksiyonu içine fakat birebir olmadığından g birebir ve içine değildir.

Şimdi yukarıda tanımlanan yedi özelliği birde inceleyeceğimiz örnekler veriyoruz.

Örnek 23. $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $C = \{0, 1, 4\}$ için

$$f : A \to B,\ f(x) = x^2 + 1$$
$$g : A \to B,\ g(x) = x + 2$$
$$h : A \to C,\ h(x) = x^2$$

biçiminde tanımlanan f, g, h fonksiyonlarını dikkate alalım.

f fonksiyonu birebir değildir, çünkü $f(-2) = 5 = f(2)$ dir. f fonksiyonu örten de değildir, çünkü $3 \in B$ için $f(x) = 3$ olacak biçimde bir $x \in A$ yoktur. Diğer yandan $f(A) = \{1, 2, 5\} \subset B$ olduğundan f içine fonksiyondur.

g fonksiyonu birebir fonksiyondur, ancak örten değildir, çünkü $5 \in B$ için $f(x) = 5$ olacak biçimde bir $x \in A$ yoktur. g fonksiyonu aynı zamanda içine olduğundan g birebir ve içine fonksiyondur.

h fonksiyonu örtendir fakat birebir değildir, çünkü $h(-2) = 4 = h(2)$ dir.

3.3.2. Bir Fonksiyonun Grafiği

A ve B gibi iki küme ve $f : A \to B$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonunun elemanları olan sıralı ikililerin düzlemde oluşturduğu kümeye *f fonksiyonunun grafiği* denir ve genellikle $G(f)$ biçiminde gösterilir, yani

$$G(f) = \{ (a, b) \mid a \in A, \text{b} = f(a) \in B \}$$

dir.

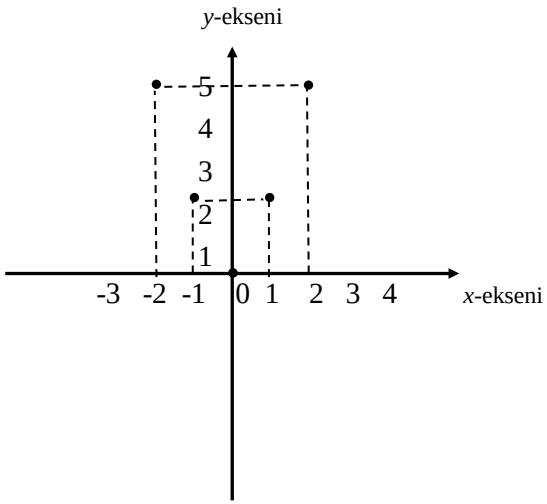
Örnek 1. $A = \{ -2, -1, 0, 1, 2\}$ ve $B = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olmak üzere

$$f : A \to B, \ f(x) = x^2 + 1$$

olarak tanımlanan f fonksiyonunu dikkate alalım. Buna göre

$$G(f) = \{ (-2, 5), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 5) \}$$

dir ve f fonksiyonunun grafiğinin düzlemdeki biçimi şekildeki gibidir.



Şekil 3.3.1

Açıklama. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bağıntısı verilsin. $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olacak biçimdeki en büyük $A \subset \mathbb{R}$ kümesine *f fonksiyonunun tanım kümesi* denir ve bu küme genellikle T_f ile gösterilir. Bundan böyle "*f* bir fonksiyon olsun" veya "$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun" ifadelerinden

$$f : T_f \to \mathbb{R}$$

biçiminde olduğu anlaşılacaktır.

Örnek 2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulalım. Sıfır ile bölme anlamlı olmadığından, *f* fonksiyonunun tanım kümesi

$$x^2 - 4 \neq 0$$

özelliğindeki sayılardan oluşacaktır. O halde $x^2 \neq 4$ yani $x \neq -2, 2$ dir. Dolayısıyla $T_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ dir.

3.3.3. Bazı Özel Fonksiyonlar ve Bunların Tanım Kümeleri

Bir önceki örnekte kesirli (rasyonel) bir fonksiyonun tanım kümesinin nasıl bulunacağı üzerinde durduk. Bu kısımda fonksiyonların veriliş biçimlerine göre tanım kümelerinin ne olacağını genel olarak belirteceğiz.

I. Polinom Fonksiyonları. $i = 0, 1, ..., n$ ve $a_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; p(x) = a_o + a_1 x + ... + a_n x^n$$

biçimindeki fonksiyonlara *polinom fonksiyonları* denir ve her *p* polinom fonksiyonu için $T_p = \mathbb{R}$, yani tüm reel sayılar için fonksiyon tanımlıdır.

Örnek 1. $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = 3 + 2x + 5x^2 + 67x^6$ biçiminde tanımlanan *p* fonksiyonu bir polinom fonksiyonudur ve $T_p = \mathbb{R}$ dir.

Özel olarak $n = 1$ olması halinde $p(x) = a_o + a_1 x$ gösterimi yerine $p(x) = a x + b$ gösterimi ve $n = 2$ olması halinde $p(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2$ gösterimi yerine $p(x) = a x^2 + b x + c$ gösterimi kullanılır.

II. Köklü Fonksiyonlar. g bir fonksiyon olmak üzere

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , f(x) = \sqrt{g(x)}$$

biçimindeki fonksiyonlara *köklü fonksiyonlar* denir. Bu fonksiyonların tanım kümesi ise kök içinin, yani $g(x)$ fonksiyonunun sıfırdan büyük veya eşit olduğu yerlerdir, buna göre

$$T_f = \{x : g(x) \geq 0 \}$$

dir.

Örnek 2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x-9}$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun tanım kümesi

$$T_f = \{x \mid x - 9 \geq 0 \} = \{ x \mid x \geq 9 \} = [9, \infty)$$

olur.

III. Rasyonel (Kesirli) Fonksiyonlar. $p(x)$ ve $q(x)$ iki polinom fonksiyon olmak üzere

$$r : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

biçimindeki fonksiyonlardır. Rasyonel fonksiyonlar sadece $q(x) = 0$ özelliğindeki noktalarda tanımlı değildir. Dolayısıyla

$$T_r = \mathbb{R} - \{ x \mid q(x) = 0 \}$$

dır.

Örnek 3. $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , r(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

bir rasyonel fonksiyondur ve yukarıdaki açıklamalar gereği

$$T_f = \mathbb{R} - \{ x \mid x^2 - 4 = 0 \} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

olduğu bulunur.

Açıklama. Eğer bir f fonksiyonu yukarıda belirtilen fonksiyonlardan bazıları yardımıyla tanımlanmış bir fonksiyon ise içerdiği her tip fonksiyon için yukarıdaki incelemeler yapılarak her birisinin tanım kümesi bulunur. Daha sonra bunlar yardımıyla f fonksiyonunun tanım kümesi belirlenir.

Örnek 4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + 9x + 3}{\sqrt{x-4}}$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonu polinom, rasyonel ya da köklü fonksiyon değil, bunların bir karışımıdır. Ancak, f fonksiyonunu

$$g(x) = x^2 + 9x + 3$$

ve

$$h(x) = \sqrt{x-4}$$

olmak üzere

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

biçiminde ifade edebiliriz. g bir polinom fonksiyonu olduğundan $T_g = \mathbb{R}$ dir. Diğer yandan, h fonksiyonunun tanımlı olması için $x - 4 \geq 0$ olmalıdır, o halde $T_h = [4, \infty)$ olarak bulunur. Ancak sıfır ile bölme yapılamayacağı da dikkate alınırsa

$$T_f = \mathbb{R} \cap (4, \infty) = (4, \infty)$$

olarak bulunur.

3.3.4. Fonksiyonlarla Yapılan İşlemler

$f : A \to \mathbb{R}$ ve $g : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. Bu iki fonksiyonun toplamı, farkı, çarpımı, bölümü ve bir sayı ile çarpımı her $x \in A$ ve $c \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki gibi tanımlanır:

1. $f + g : A \to \mathbb{R}$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,

2. $f - g : A \to \mathbb{R}$, $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$,
3. $f \,.\, g : A \to \mathbb{R}$, $(f \,.\, g)(x) = f(x) \,.\, g(x)$,
4. $f / g : A \to \mathbb{R}$, $(f / g)(x) = f(x) / g(x)$, $g(x) \neq 0$
5. $c \,.\, f : A \to \mathbb{R}$, $(c \,.\, f)(x) = c \,.\, f(x)$.

Örnek 5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$ ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - 1$ fonksiyonları verilsin. Buna göre,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (3x + 2) + (x - 1) = 4x + 1,$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (3x + 2) - (x - 1) = 2x + 3,$$
$$(f \,.\, g)(x) = f(x)\ g(x) = (3x + 2)(x - 1) = 3x^2 - x - 2,$$
$$(f / g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+2}{x-1},$$
$$(3f)(x) = 3(3x + 2) = 9x + 6$$

olarak bulunur.

3.3.5. Polinomlarda bölme işlemi.

$P(x) = p_n x^n + \cdots + p_2 x^2 + p_1 x + p_0$, $Q(x) = q_m x^m + \cdots + q_2 x^2 + q_1 x + q_0$ $K(x) = k_r x^r + \cdots + k_2 x^2 + k_1 x + k_0$ polinomları için $n \geq m$ olsun. Bu durumda, $r < m$ olacak biçimde

$$P(x) = Q(x) \cdot B(x) + K(x)$$

eşitliğini sağlayan $K(x)$ ve $B(x)$ polinomları vardır. Burada $P(x)$ polinomuna *bölünen polinom* (veya kısaca *bölünen*), $Q(x)$ polinomuna *bölen polinom*(kısaca *bölen*), $B(x)$ polinomuna *bölüm polinomu* (kısaca *bölüm*), $K(x)$ polinomuna da *kalan polinom* (kısaca *kalan*) adı verilir. Bölme işleminin nasıl yapılacağını, aşağıda vereceğimiz örnek üzerinde adım adım anlatacağız.

Örnek 6. $P(x) = 2x^5 - x^4 - x^3 - 78x + 30$
polinomunu

$$Q(x) = 2x^3 + 5x^2 + 12x + 31$$

polinomuna bölelim. Önce $P(x)$ in $2x^5$ terimi ile $Q(x)$ in $2x^3$ terimi (yani en büyük kuvvetli terimleri) karşılaştırılır ve $2x^3$ ile ne çarpılınca $2x^5$ elde edileceği bulunur. Bunun x^2 olduğu âşikârdır. Normal bölme işleminden bildiğimiz tablo düzenlenir. Tablo aşağıdaki gibidir.

$$\begin{array}{r|l}
2x^5 - x^4 - x^3 - 78x + 30 & 2x^3 + 5x^2 + 12x + 31 \\ \cline{2-2}
-\ 2x^5 + 5x^4 + 12x^3 + 31x^2 & x^2 \\ \cline{1-1}
-6x^4 - 13x^3 - 31x^2 - 78x + 30 &
\end{array}$$

Henüz bölme işlemi tamamlanmamıştır, çünkü kalanın derecesi bölenin derecesinden büyüktür. Kalanın derecesi bölenin derecesi olan 3 den küçük olana kadar bölme işlemine ardışık olarak devam edilmelidir. İkinci adımda

$$\begin{array}{r|l}
2x^5 - x^4 - x^3 - 78x + 30 & 2x^3 + 5x^2 + 12x + 31 \\ \cline{2-2}
-\ 2x^5 + 5x^4 + 12x^3 + 31x^2 & x^2 - 3x \\ \cline{1-1}
-6x^4 - 13x^3 - 31x^2 - 78x + 30 & \\
-\ -6x^4 - 15x^3 - 36x^2 - 93x & \\ \cline{1-1}
2x^3 + 5x^2 + 15x + 30 &
\end{array}$$

tablosu bulunur. Burada da kalanın derecesi bölenin derecesinden küçük değildir. Üçüncü adımda elde edilen tablo

$$\begin{array}{r|l}
2x^5 - x^4 - x^3 - 78x + 30 & 2x^3 + 5x^2 + 12x + 31 \\ \cline{2-2}
-\ 2x^5 + 5x^4 + 12x^3 + 31x^2 & x^2 - 3x + 1 \\ \cline{1-1}
-6x^4 - 13x^3 - 31x^2 - 78x + 30 & \\
-\ -6x^4 - 15x^3 - 36x^2 - 93x & \\ \cline{1-1}
2x^3 + 5x^2 + 15x + 30 & \\
-\ 2x^3 + 5x^2 + 12x + 31 & \\ \cline{1-1}
3x - 1 &
\end{array}$$

olur. Bu tablo bölme işleminin tamamlandığını göstermektedir, çünkü bu son tabloda elde edilen kalanın derecesi, bölenin derecesinden küçüktür. Bölüm $B(x) = x^2 - 3x + 1$, kalan $K(x) = 3x - 1$ olarak bulunmuştur. $P(x) = 2x^5 - x^4 - x^3 - 78x + 30$ ve $Q(x) = 2x^3 + 5x^2 + 12x + 31$ olduğu da gözönüne alınırsa $P(x) = Q(x) \cdot B(x) + K(x)$ olur.

3.3.6. İki Fonksiyonun Bileşkesi

A, B, C, D kümeleri ve

$$f : A \to B,\ \ g : C \to D$$

fonksiyonları verilsin. C = *f*(*A*) olmak üzere

$$h : A \to D,\ \ h(x) = g(f(x))$$

biçiminde tanımlanan *h* fonksiyonuna *f* ve *g* fonksiyonlarının *bileşke fonksiyonu* denir ve $h = g \circ f$ biçiminde gösterilir.

Tanıma dikkat edilirse *g* fonksiyonunun tanım kümesi *f* fonksiyonunun görüntü kümesidir. $h = g \circ f$ fonksiyonunun tanım kümesi *A*, değer kümesi ise *D* kümesidir. $h = g \circ f$ fonksiyonu *A* kümesinin elemanlarını *D* kümesinin elemanları ile eşlemektedir.

Örnek 7. *f* ve *g* fonksiyonları

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = 3x + 2$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ g(x) = x - 1$$

biçiminde tanımlanmış olsun. Bu durumda

$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 1) = 3(x - 1) + 2 = 3x - 1$$

ve

$$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 2) = 3x + 2 - 1 = 3x + 1$$

olarak bulunur.

Bileşke Fonksiyonunun Özellikleri

f, g, h fonksiyonları verildiğinde

1. Genellikle $g \circ f \neq f \circ g$ dir, yani değişme özelliği yoktur.

2. $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, bu nedenle parantezler yazılmayabilir.

3. $f \circ i = i \circ f = f$

özellikleri gerçeklenir. Bu özelliklerin gerçeklendiği kaynaklardaki soyut matematik kitaplarından herhangi birinden görülebilir.

3.3.7. Bir Fonksiyonun Tersi

A, B kümeleri ve bir

$$f : A \to B$$

fonksiyonu verilsin. Her $x \in A$ için $f(x) = y$ olduğunda $g(y) = x$ olacak biçimdeki

$$g : B \to A$$

bağıntısına f *fonksiyonunun tersi* denir ve f fonksiyonunun tersi olan bağıntı f^{-1} ile gösterilir. Eğer $f : A \to B$ fonksiyonu birebir ve örten ise $f^{-1} : B \to A$ bağıntısı bir fonksiyondur.

Açıklamalar

1. Tanımdan, sadece birebir ve örten olan fonksiyonların terslerinin de fonksiyon olduğu anlaşılır. f fonksiyonunun tanım kümesi tersinin değer kümesidir, f fonksiyonunun değer kümesi ise tersinin tanım kümesi olur. Diğer yandan

$$f : A \to B$$

fonksiyonu birebir ve örten olduğunda "$y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$" dir.

2. $f : A \to B$ birebir ve örten bir fonksiyon ve i birim fonksiyon olmak üzere

i. $f \circ i_A = i_B \circ f = f$,

ii. $f^{-1} \circ f = i_A$, $f \circ f^{-1} = i_B$,

iii. $(f^{-1})^{-1} = f$

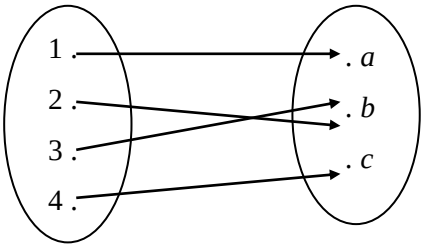
iv. $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

3. Ters görüntü ile ters fonksiyon karıştırılmamalıdır. Bir

$$f : A \to B$$

fonksiyonu için f^{-1} bağıntısı bir fonksiyon olmasa da herhangi bir $a \in A$ için $f^{-1}(a)$ görüntüsü bulunabilir.

Örnek 8. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{a, b, c\}$ olmak üzere



biçiminde tanımlanan $f : A \to B$ fonksiyonu bire bir ve örten olmadığından f^{-1} bağıntısı fonksiyon değildir, ancak $f^{-1}(a) = \{1\}$, $f^{-1}(b) = \{2, 3\}$ ve $f^{-1}(c)=\{4\}$ dür.

Örnek 9. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonu birebir ve örten olmadığından f^{-1} bir bağıntıdır, fonksiyon değildir, ancak $f^{-1}(4) = \{-2, 2\}$ dir.

Örnek 10. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$ biçiminde tanımlı f fonksiyonunun birebir ve örten olduğu kolayca görülebilir. İlk olarak f fonksiyonunun birebir olduğunu görelim. Eğer $x \neq y$ ise $3x \neq 3y$ ve dolayısıyla

$$3x + 2 \neq 3y + 2$$

dir, bu ise

$$f(x) \neq f(y)$$

olduğunu gösterir. İkinci olarak da f fonksiyonunun örten olduğunu görelim. Herhangi bir $y \in \mathbb{R}$ sayısı verildiğinde x sayısı $x = \dfrac{y-2}{3} \in \mathbb{R}$ olarak alınırsa

$$f(x) = f\left(\frac{y-2}{3}\right) = 3.\frac{y-2}{3} + 2 = y - 2 + 2 = y$$

olduğu bulunur. Bu ise f fonksiyonunun örten olduğunu gösterir.

f birebir ve örten olduğundan tersi bir fonksiyondur. Şimdi f fonksiyonunun tersini bulmaya çalışalım. Bunun için

$$y = 3x + 2$$

eşitliğinden x değişkenini çekmemiz gerekir. Böylece

$$3x = y - 2$$

ve dolayısıyla

$$x = \frac{y-2}{3}$$

olarak bulunur. Fonksiyonlarda değişken olarak genelde x kullanıldığından, bu eşitlikte x yerine y, y yerine de x yazılırsa

$$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$$

olarak elde edilir.

Örnek 11. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x+3}{4x+1}$ fonksiyonunun tersini bulalım. f fonksiyonu bire bir ve örten bir fonksiyon olduğundan (görünüz)

$$y = \frac{2x+3}{4x+1}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned}(4x + 1)\, y = 2x + 3 &\Rightarrow 4xy + y = 2x + 3\\ &\Rightarrow x(4y - 2) = 3 - y\\ &\Rightarrow x = \frac{3-y}{4y-2}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece

$$f^{-1}(x) = \frac{3-x}{4x-2} = \frac{-x+3}{4x-2}$$

olarak bulunur. f fonksiyonu için

$$T_f = \mathbb{R} - \{ x \mid 4x + 1 = 0 \} = \mathbb{R} - \{ \tfrac{-1}{4} \}$$

f^{-1} fonksiyonu için

$$T_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{ x \mid 4x - 2 = 0 \} = \mathbb{R} - \{ \tfrac{1}{2} \}$$

olur ve $f(T_f) = \mathbb{R} - \{ \frac{1}{2} \}$, $f^{-1}(T_{f^{-1}}) = \mathbb{R} - \{ \frac{-1}{4} \}$ dür.

Açıklama. Genel olarak, $f(x) = a + bx$ ise

$$f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a} = \frac{1}{a}(x-b)$$

ve $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ise

$$f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

olur.

Tanım. A ve B kümeleri ve bir

$$f : A \to B$$

fonksiyonu verilsin. $A_1 \subset A$ olmak üzere her $x \in A_1$ için

$$f_1 : A_1 \to B,\ f_1(x) = f(x)$$

olarak tanımlanan f_1 fonksiyonuna *f fonksiyonunun A_1 kümesi üzerine kısıtlaması* denir ve genellikle bu fonksiyon $f|_{A_1}$ biçiminde gösterilir.

Bir fonksiyonun kısıtlaması onun tanım kümesinin bir alt kümesini tanım kümesi olarak almaktan başka bir şey değildir.

Örnek 12. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunu dikkate alalım. f fonksiyonunun birebir olmadığı açıktır. Ancak $\mathbb{R}^+$ ile pozitif gerçel sayıların kümesini gösterirsek,

$$f\big|_{\mathbb{R}^+} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f\big|_{\mathbb{R}^+}(x) = x^2$$

kısıtlanmış fonksiyonu birebir fonksiyondur.

3.4. CEBİRSEL FONKSİYONLAR

$$f : R^+ \to R, \quad f(x) = \sqrt{x}$$

$$g : [1, \infty) \to R, \; g(x) = \sqrt{x-1} + x$$

$$h : R \to R, \; h(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

$$k : (0, \infty) \to R \quad k(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$$

fonksiyonlarında olduğu gibi toplama, çarpma, bölme gibi işlemlerin yanında değişkenin rasyonel kuvvetlerini de bulunduran fonksiyonlara *cebirsel fonksiyon* denir. Buna göre polinom ve rasyonel fonksiyonların birer cebirsel fonksiyon olduğu aşikardır.

Cebirsel fonksiyonların tanım kümesi açıkça belirtilmediği zaman fonksiyon altındaki değeri reel sayı olacak şekildeki bütün reel sayılar kümesi tanım kümesi olarak alınacaktır. Tanım kümesini bulma problemi bizi bazen eşitsizliklerin çözümüne götürecektir.

Örnek 1. $f(x) = \sqrt{2 - 3x}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulalım.

Karekök fonksiyonu negatif olmayan sayılarda tanımlı olduğundan bu fonksiyonun tanım kümesi $2 - 3x > 0$ eşitsizliğini sağlayan reel sayılardan oluşur. O halde

$$2-3x \geq 0 \;\Rightarrow\; 3x \leq 2 \;\Rightarrow\; x \leq 2/3 \;\Rightarrow\; T_f = (-\infty, 2/3]$$

dir.

Örnek 2. $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulalım.

Önceki örnekte olduğu gibi g nin tanım kümesi $1-x^2 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesidir. Buna göre T_g=[-1, 1] dir.

Örnek 3. $f(x) = \sqrt[3]{x} - x^3$ fonksiyonunun tanım kümesini bulalım.

Bütün reel sayıların küpkökü yine bir reel sayı olduğundan bu fonksiyonun tanım kümesi R reel sayılar kümesidir.

Bazen bir fonksiyon birden çok cebirsel fonksiyonun toplamından (veya çarpımından) oluşmuş olabilir. Bu durumda bu fonksiyonun tanım kümesi fonksiyonu oluşturan her bir fonksiyonların tanım kümelerinin arakesitine eşittir.

Örnek 4. $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{2-3x} - \sqrt[3]{x} + 5x - 4$ fonksiyonunun tanım kümesi, f fonksiyonunu oluşturan $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, $h(x) = \sqrt{2-3x}$, $k(x) = \sqrt[3]{x}$ ve $l(x) = 5x-4$ fonksiyonlarının tanım kümelerinin kesişimidir. Buna göre, önceki örnekler dikkate alınırsa

$$T_f = T_g \cap T_h \cap T_k \cap T_l = [-1,1] \cap (-\infty, 2/3] \cap R \cap R = [-1,\ 2/3]$$

olur.

Şimdi basit bir cebirsel fonksiyonun grafiğini bazı noktalarını bularak kabaca çizelim.

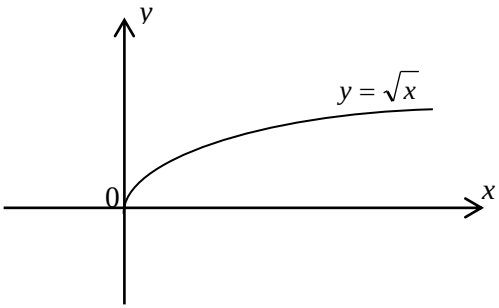
Örnek 5. $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Bir kere fonksiyonun tanım kümesi $[0,\ \infty)$ aralığıdır. Bu aralığa ait x in bazı değerleri için fonksiyonun aldığı değerler Tablo 3.4.1 de gösterilmiştir. Bulunan bu değerlere karşılık gelen noktaları düzlemde işaretleyip uygun

bir şekilde birleştirirsek f fonksiyonunun grafiğini kabaca elde etmiş oluruz. (Şekil 3.4.1).

x	$f(x)=\sqrt{x}$	$(x, \sqrt{x})$
0	0	(0, 0)
1/4	1/2	(1/4,1/9)
1	1	(1, 1)
4	2	(4, 2)
9	3	(9, 3)

Tablo 3.4..1



Şekil 3.4.1

3.5. PARÇALI FONKSİYONLAR

Bir fonksiyonun kuralı, tanım kümesinin alt kümelerine göre değişiyorsa bu fonksiyona *parçalı fonksiyon* denir. Örneğin bir f fonksiyonunun tanım kümesi A olsun. $A = A_1 \cup A_2$ ve $A_1 \cap A_2 = \phi$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in A_1 \\ f_2(x) & x \in A_2 \end{cases}$$

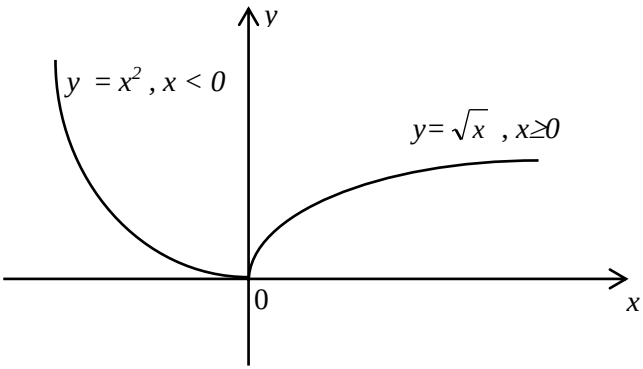
biçimindeki $f(x)$ fonksiyonu bir parçalı fonksiyondur. A nın daha fazla sayıda ayrık alt kümelerinin birleşimi olması durumunda da benzer bir gösterim kullanılır.

Örnek 1. $f : R \to R, \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \text{ ise} \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$

olarak verilen $f(x)$ fonksiyonu için $f(-4)$, $f(4)$ değerlerini bulunuz ve $f(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

f fonksiyonunun tanımına göre 0 dan küçük sayıların görüntüsü $f_1(x) = x^2$ fonksiyonu kullanılarak, 0 a eşit veya sıfırdan büyük sayıların görüntüsü de $f_2(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu kullanılarak hesaplanır. Buna göre $f(-4) = f_1(-4) = 16$ ve $f(4) = f_2(4) = 2$ olur.

f nin grafiği , $(-\infty, 0)$ aralığında $f_1(x) = x^2$ parabolü ile $[0, \infty)$ aralığında ise $f_2(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun grafiğinin birleşiminden oluşur. Buna göre $f(x)$ fonksiyonunun grafiği Şekil 3.5.1 de verildiği gibidir.



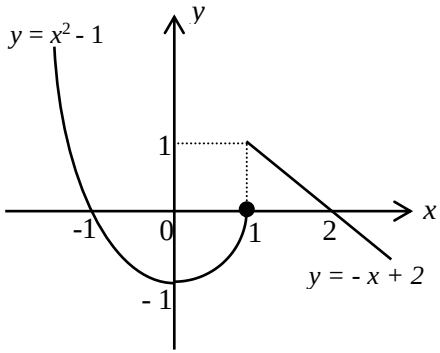
Şekil 3.5.1

Örnek 2. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1 \\ -x + 2, & x > 1 \end{cases}$

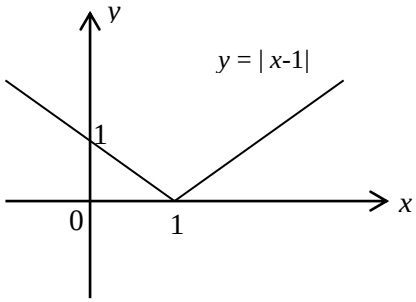
fonksiyonu için $f(0)$, $f(1)$ ve $f(2)$ değerlerini hesaplayalım ve grafiğini çizelim.

$0 < 1$ ve $1 \leq 1$ olduğundan $f(0)$ ve $f(1)$ değerleri $f_1(x) = x^2-1$ fonksiyonu kullanılarak $2 > 1$ olduğundan da $f(2)$ değeri $f_2(x) = -x+2$ fonksiyonu kullanılarak hesaplanır. Buna göre $f(0) = 0^2-1 = -1$, $f(1) = 1^2 - 1 = 0$ ve $f(2) = -2+2 = 0$ bulunur.

f nin grafiğine gelince; $(-\infty, 1]$ aralığında $y = x^2 - 1$ parabolü ile $(1, \infty)$ aralığında $y = -x + 2$ doğrusunun birleşimi f nin grafiğini verecektir. Bu ise Şekil 3.5.2 de gösterilmiştir.



Şekil 3.5.2



Şekil 3.5.3

Daha önce mutlak değer fonksiyonlarını incelemiştik. $|f(x)|$ mutlak değer fonksiyonu parçalı bir fonksiyondur. Gerçekten

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \quad ise \\ -f(x) & f(x) < 0 \quad ise \end{cases}$$

dir. Buna daha somut bir örnek vermek için $f(x) = |x\text{-}1|$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Mutlak değer tanımına göre

$$|f(x)| = |x-1| = \begin{cases} x-1 \;\; ; \;\; x-1 \geq 0 \quad \text{veya} \quad x \geq 1 \\ -(x-1) \; ; \;\; x-1 < 0 \quad \text{veya} \quad x < 1 \end{cases}$$

dir. Bu fonksiyonun grafiği Şekil 3.5.3 de gösterilmiştir.

Çok kullanılan ve adına "tam değer fonksiyonu" denilen özel bir parçalı fonksiyon daha vardır. Şimdi bunu inceleyeceğiz.

Tanım. Bir x reel sayısından büyük olmayan (yani küçük veya eşit olan) en büyük tam sayıya x in *tam değeri* denir ve $[|x|]$ şeklinde gösterilir. Buna

göre [| 0,3 |] = 0, [| 5, 1 |] = 5, [| -2 |] = - 2, [| - π |] = - 4, [| $\sqrt{2}$ |] = 1 , [| -5,1201|] = -6 dır.

Bir x reel sayısını tam değerine dönüştüren

$$f : R \to R,\ f(x) = [|x|]$$

fonksiyonuna *tam değer fonksiyonu* (*basamak fonksiyonu*) denir. Tam değer fonksiyonunun grafiği hakkında bir fikir sahibi olmak için, bu fonksiyonun tanım kümesini [-2, 3] aralığına kısıtlayarak grafiğini çizelim.

$$f : [-2,3] \to R,\ f(x) = [|x|]$$

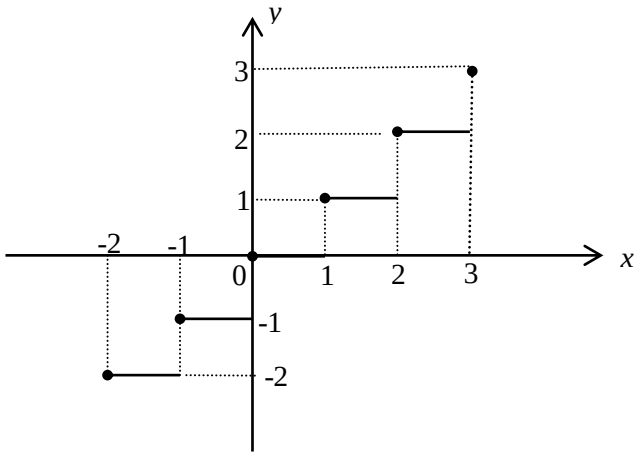
fonksiyonunun grafiğini çizmek için $x \in [m, m+1)$, $m \in Z$ ise [| x |] = m gerçeği göz önüne alınırsa

$-2 \le x < -1$ için [| x |] = -2 , $-1 \le x < 0$ için [| x |] = -1

$0 \le x < 1$ için [| x |] = 0 , $1 \le x < 2$ için [| x |] = 1

$2 \le x < 3$ için [| x |] = 2 , $x = 3$ için [| x |] = 3

olur. Buna göre fonksiyonun grafiği Şekil 3.5.4 de verildiği gibidir.



Şekil 3.5.4

ALIŞTIRMALAR

1. $(3x + 1, 2y + 2) = (-2, 1)$ olduğuna göre x ve y sayılarını bulunuz.

2. A x $B = \{ (a, a), (b, c), (a, e), (a, c), (b, e), (b, a) \}$ olduğuna göre A, B ve B x A kümelerini bulunuz.

3. $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{a, b, c\}$ ise aşağıdakilerden hangileri A kümesinden B kümesine birer bağıntıdır, hangileri A kümesinden B kümesine birer fonksiyondur?

i. $\{(1, a), (2, b), (3, c)\}$

ii. $\{(1, a)\}$

iii. $\{(2, 1), (1, 2)\}$

iv. $\{(2, b), (3, c), (1, a), (2, a)\}$

v. $\{ (1, b), (2, b), (3, a), (4, c)\}$

4. Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

i. $f(x) = 3x - 2$,

ii. $f(x) = \dfrac{2x}{3x-2}$

iii. $f(x) = \sqrt{2x+5}$

iv. $f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{4x-1}}$

5. $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{a, b, c\}$ ise A kümesinden B kümesine olan bağıntı ve fonksiyonların sayısını bulunuz. B den A kümesine tüm fonksiyonları bulunuz ve B den A ya fonksiyon olmayan iki bağıntı örneği veriniz.

6. $A = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x - 2$ olmak üzere $f(A)$ kümesini bulunuz.

7. $f(x) = 2x + 5$ ve $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 1$ ise $g(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

8. $f(3x + 5) = 5x + 3$ ise $f(0)$ değerini bulunuz.

9. f, g ve h fonksiyonları $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^3 - 5x$ ve $h(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ olarak tanımlıdır, buna göre $(h \circ g \circ f)(1)$, $(g \circ f \circ h)(-2)$ ve $(f \circ h \circ g)(0)$ değerlerini bulunuz.

10. f, g, h fonksiyonları 9.Alıştırmadaki gibi olmak üzere $f^{-1}(3)$, $g^{-1}(2)$ ve $h^{-1}(5)$ değerlerini bulunuz.

11. $f(x) = x + 3$ ve $g(x) = 3x + 2$ olduğuna göre $(gof)^{-1}(3)$ değerini bulunuz. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$ olmak üzere $g(x) = 3f(x) - 2f^{-1}(x)$ olarak tanımlanıyor. Buna göre $g(\{0, 1, 2, 3\})$ kümesini bulunuz.

12. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere,

i) $A \times B$ kümesini yazınız.

ii) $\beta = \{(x,y) \mid x,y \in A$ ve $x \leq y\}$ bağıntını sıralı ikililerin kümesi olarak, liste yöntemi ile yazınız.

iii) β bağıntısının grafiğini çiziniz.

iv) β bağıntısının tersi olan β^{-1} bağıntısını bulunuz ve β^{-1} in grafiğini çiziniz.

v) β bağıntısının özelliklerini (yansıma,simetri, geçişme, ters simetri) inceleyiniz.

13. Tanım kümesi $T_f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olan $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \neq 1 \text{ iken} \\ x^2 + 1, & x = 1 \text{ iken} \end{cases}$ olarak verilen f fonksiyonu için,

i) f nin değer kümesini bulunuz.

ii) f nin birebir olup olmadığını inceleyiniz.

14. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ ve $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ eşitlikleri ile verilen f ve g fonksiyonları için,

i) T_f, T_g kümeleri ile f ve g nin değer kümelerini bulunuz.

ii) $f+g$, $f \cdot g$, ve f/g fonksiyonlarını bulunuz.

15. f ve g 14.sorudaki fonksiyonlar olmak üzere,

i) fog ve gof fonksiyonlarını bulunuz

ii) $(fog)(2)$ ve $(gof)(2)$ değerlerini bulunuz.

iii) T_{fog}, T_{gof} kümelerini bulunuz.

16. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 5$ fonksiyonunun birebir ve örten olduğunu gösteriniz ve f fonksiyonunun tersini bulunuz.

17. $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ fonksiyonu ile fof bileşke fonksiyonunun tanım kümelerini bulunuz. Bu örneği dikkate alarak f^2 ve fof fonksiyonları üzerine yorum yapınız.

18. $f:A\to B$ fonksiyonu birebir ve örten bir fonksiyon ise $(f^{-1})^{-1}=f$ olduğunu gösteriniz.

19. $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonlar olmak üzere,

i) $(f+g)oh=(foh)+(goh)$,

ii) $(f\cdot g)oh=(foh)\cdot(goh)$

olduğunu gösteriniz.

20. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verisin. Eğer her $x\in\mathbb{R}$ için $f(-x)=f(x)$ şartı sağlanıyorsa *f* ye *çift fonksiyon*, her $x\in\mathbb{R}$ $f(-x)=-f(x)$ şartı sağlanıyorsa *f* ye *tek fonksiyon* adı verilir. Buna göre,

i) f ve *g* çift fonksiyon ise $f+g$, $f\cdot g$ ve gof nin de çift,

ii) f ve *g* tek fonksiyon ise $f+g$, fog nin tek, $g\cdot f$ nin çift,

iii) f çift, *g* tek fonksiyon ise $f\cdot g$ nin tek, fog nin çift

olduğunu gösteriniz.

21. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyonu ise f nin tek ve çift iki fonksiyonun toplamı olarak yazılabileceğini gösteriniz.(*)

22. **i)** $\beta=\{(x,y)|\ x=|y|\}\subset\mathbb{R}^2$

ii) $\beta=\{(x,y)|\ x\cdot y>0\}\subset\mathbb{R}^2$

iii) $\beta=\{(x,y)|\ x>0\}\subset\mathbb{R}^2$

iv) $\beta=\{(x,y)|\ |x|+|y|=1\}\subset\mathbb{R}^2$

v) $\beta=\{(x,y)|\ |x|-|y|=1\}\subset\mathbb{R}^2$

vi) $\beta=\{(x,y)|\ |x|=|y|\}\subset\mathbb{R}^2$

bağıntılarının grafiklerini çiziniz.

23. $x\in\mathbb{R}$ ve $n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $[|x+n|]=[|x|]+n$ olduğunu gösteriniz.

24. $f(x)=2x$ olmak üzere $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ ifadesini hesaplayınız.